

生090.1-478

正

明治大学大学院 理工学研究科
2011年度 博士学位請求論文



双線形外乱を持つシステムに対する
外乱分離オブザーバとSDRE法を用いた
 H_∞ 制御の研究と熱交換器への応用

Study on H_∞ Control using a Disturbance Isolation Observer and
the SDRE Method for a System with Bilinear Disturbances,
and its Application to a Heat Exchanger

学位請求者 機械工学専攻

中山 信

目次

Abstract	iv
第 1 章 序論	1
1.1 はじめに	1
1.2 双線形システム	1
1.3 H_∞ 制御理論	2
1.3.1 線形 H_∞ 制御	2
1.3.2 非線形 H_∞ 制御	2
1.3.3 双線形 H_∞ 制御	3
1.4 双線形オブザーバ	4
1.5 SDRE 法	5
1.5.1 SDRE 法の概要	5
1.5.2 拡張 2 次形式リアプノフ関数	6
1.5.3 SDRE 法に基づく双線形 H_∞ 出力制御	7
1.6 本論文の概要	8
1.7 本論文の構成	9
第 2 章 SDRE 法に基づく双線形 H_∞ 制御	10
2.1 定式化	10
2.2 双線形 H_∞ 状態フィードバック制御則	12
2.3 双線形 H_∞ 出力フィードバック制御則	16

第 3 章 双線形外乱項を考慮した双線形オブザーバの設計	23
3.1 双線形全次元オブザーバ	23
3.2 双線形外乱分離オブザーバ	26
3.2.1 相似システム	26
3.2.2 双線形外乱分離オブザーバの設計	29
第 4 章 双線形オブザーバ H_∞ 制御の安定性	32
4.1 定式化	32
4.2 双線形全次元オブザーバ H_∞ 制御則	33
4.3 双線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御則	36
第 5 章 熱交換器への適用	40
5.1 双線形系熱交換器モデル	40
5.2 熱交換器のモデリング	41
5.3 双線形オブザーバ H_∞ 制御則に対する一般化プラントの設計	42
5.4 双線形 H_∞ 出力フィードバック制御則に対する一般化プラントの設計	46
第 6 章 シミュレーションと実験	48
6.1 シミュレーションと実験の順序と目的	48
6.2 3 制御器と 3 オブザーバの比較	49
6.2.1 制御性能比較	52
6.2.2 オブザーバ性能比較	59
6.3 双線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御	70
6.4 線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御との比較シミュレーション	80
6.5 考察	88
第 7 章 結論	90
付 録 A 非線形外乱システムの収束条件	93

付 録 B 熱交換器の定式化	95
B.1 記号と添字	95
B.2 熱収支式による定式化	95
B.3 並流型熱交換器の基礎式	98
B.4 流速が変化する場合	100
B.5 重み付残差法	104
参考文献	109
謝辞	117

Abstract

In this paper, we focus on a bilinear H_∞ control problem for a bilinear system that has bilinear terms with respect to not only the input but also the unknown disturbance and solve it using the state-dependent Riccati equation (SDRE) method.

The SDRE method can reduce difficult nonlinear control problems into algebraic Riccati equations just same as in the linear control case, but they are expressed in the state-dependent coefficient (SDC) form and are solved online. There are many application examples because the evaluation of the control performance is straightforward, and the implementation in real equipments is easy.

But the stability and the robustness have not been discussed sufficiently, yet. The SDRE method was usually applied to bilinear H_∞ control problems by regarding bilinear terms as SDC terms and solved the resulting Hamilton-Jacobi equation (HJE). In this case, we cannot obtain a Lyapunov function directly from the solution. On the other hand, the solution of SDRE derived based on an extended quadratic Lyapunov candidate function gives a Lyapunov function directly. Hence, in this paper, we apply the SDRE method based on the extended quadratic Lyapunov function to this bilinear system.

We consider a bilinear H_∞ output feedback controller and a bilinear observer- H_∞ controller for this bilinear system. As bilinear observers, we propose two kinds of observers: a bilinear full order observer and a bilinear disturbance isolation observer. We obtain the following sufficient conditions by applying the SDRE method based on the extended quadratic Lyapunov function: (1) the internal stability and the robustness of the bilinear H_∞ output feedback control system, (2) the boundedness of estimated errors of the bilinear full order observer and the bilinear disturbance isolation observer, and (3) the internal stability and the robustness of the bilinear observer- H_∞

control system.

In order to evaluate the performance and practicality of proposed controllers, we apply these controllers to a heat exchanger. It is assumed that we must regulate the temperature at the outlet under relatively large disturbance flow rate caused by users.

Since the dynamic characteristics of the heat exchanger are described by the partial differential equation, we approximate it to a bilinear system with input and disturbance bilinear terms around a steady state by means of method of weighted residuals (MWR). The proposed controllers and observers are applied to this system, and simulations and experiments are conducted to show the efficiency of the controllers and the applicability to real systems.

Keywords: SDRE, bilinear disturbance, H-infinity control, extended quadratic Lyapunov function, bilinear observer, heat exchanger.

第1章 序論

1.1 はじめに

近年、現代制御理論の発展とともに、より複雑なシステムを扱える制御理論が確立してきている。非線形制御理論はその中の一つである。しかし、産業界における最新の制御理論を積極的に取り入れようという風潮は、線形制御理論を積極的に取り入れた 1990 年代などと比べると最近はやや低調のように思われる。その理由として、非線形制御則の難しさからくるプログラミングコスト、非線形制御則の特殊性からくる制御システムへの実装しにくさ、既存のシステムへ Matlab などの制御専用ソフトウェアを組み込む困難さなどがある。大規模なプラントであるほど、新たな理論を取り入れる際、その理論に合わせるためにハード面の仕様を大きく変更する事は好まれない。信頼性のある長年使われた実験式をベースに、既存のプログラムに若干の変更を加える事で、なるべくコストを掛けずに最新の理論を導入したいというのが現場の願いであると思われる。

そこで以下では、線形系の拡張であり、かつ、非線形系の中では最も簡単で線形系に近いが、線形近似してしまうとその本質が失われてしまうシステムである、双線形システムについて考える [1]。

1.2 双線形システム

制御理論の実装において、非線形システムを局所線形近似システムとして扱う制御手法は古典的で簡単かつ実践的な方法である。しかし、線形制御は局所的であるので、システムにさらなる性能を求める時に、限界に辿りつく。この時、非線形制御理論の適用の第一歩として、双線形制御理論の適用を考える事は有用である。例えば入力・外乱が大きい場合、線形近似システムにおいて切り捨てた状態量との積の双線形項が無視できない項となる場合があり、このような時には、双線形制御理論を使用するのが適当である。双線形制御理論は線形制御理論との共通部分が多いため制御性能評価

の見通しが良く、非線形制御理論の中では比較的簡単な割に、大きな成果を生み出す可能性があり、双線形システムは広範な応用が見込める非線形システムと言える。しかし、従来の双線形制御理論では入力と状態量の双線形項（以下、双線形入力項という）のみを扱ったものがほとんどであり、外乱と状態の双線形項（以下、双線形外乱項という）を考慮したものは数を見ない。

1.3 H_∞ 制御理論

1.3.1 線形 H_∞ 制御

1980 年初頭に G.Zames[2] が提唱した H_∞ 制御は、1980 年代後半、「2 本のリカッチ方程式 (不等式)」で可解条件を示した Glover と Doyle の論文 [3]、すぐ後の Doyle らの論文 [4](筆者のイニシャルを取って DGKF 論文と言われる) の二つの論文により、線形系における一般的な制御理論となった。二つの論文の解法は入力変換・相似変換で関係づけられており [5]、等価な伝達関数を与えるため、その制御性能は理論上等しいという事が言える。DGKF 論文は、システムが「直交条件」を満たす場合、解が簡単になる事も示している。児島らはこの二つの論文の解法に対し、直交条件を仮定しないシステムに対して、微分ゲームの手法から統一的解法を与えた [6]。児島らの論文において、Glover と Doyle 論文の解に対応するのが鞍点解 (I)、DGKF 論文の解に対応するのが鞍点解 (II) であり、以下のような関係になっている。

- 児島らの鞍点解 (I) \Leftrightarrow Glover と Doyle 論文の解

リアプノフ候補関数「推定状態量の定係数 2 次形式 + 推定誤差の定係数 2 次形式」から導かれる

- 児島らの鞍点解 (II) \Leftrightarrow DGKF 論文の解

リアプノフ候補関数「状態量の定係数 2 次形式 + 推定誤差の定係数 2 次形式」から導かれる

1.3.2 非線形 H_∞ 制御

1990 年代初頭から、非線形系に対する H_∞ 制御の研究が始まり、線形 H_∞ 制御の自然な拡張として、リカッチ方程式に対応したハミルトンヤコビ方程式 (Hamilton-Jacobi equation: HJE) 又は、ハミルトンヤコビ不等式 (Hamilton-Jacobi inequality: HJI) の解に基づく非線形 H_∞ 制御則が示さ

れた [7][8][9][10]。しかし、HJE の一般解となるリアプノフ関数を求める事が困難なため、HJE の解を、定係数 2 次形式に近い形や、ある積分条件を満たす形式に限定したリアプノフ候補関数に設定し、関数近似手法によりリカッチ方程式 (不等式) を導き、それを解いてフィードバックゲインを求める、という手法がしばしば用いられている。例えば、[11] では HJE の解を定係数 2 次形式と高次の定係数関数との和と定め、それをテラ展開近似された HJE に代入し、導出された高次多項式のリカッチ方程式を解くことでフィードバックゲインを求めている。状態依存リカッチ方程式 (state dependent Riccati equation: SDRE) に基づく手法では、HJE の解を状態量の積分条件を満たす時変係数関数と定め、それを HJE に代入し、導出された SDRE を解く事でフィードバックゲインを求めている [12][13]。これらの手法は、実装においては、オフラインでリカッチ方程式 (不等式) 定数解を事前に求めるか、オンラインで逐次時変解を求めるか、ということになる。

1.3.3 双線形 H_∞ 制御

1990 年代半ばから後半にかけ、非線形 H_∞ 制御理論の実装の足掛かりとして、双線形系に対する H_∞ 制御の研究がさかんに行われた。特に、三平らはいち早くこの問題に取り組み、双線形制御に対し一定の見識を示している [14][15][16][17][18][19]。特に、[15][16][17] の研究では、線形入力項を持たない双線形入力システム (原点で不可制御となるシステム) に対し、非線形重みを評価出力に導入する事で原点近傍外での応答の改善を図り、かつ、状態依存リカッチ不等式から負定となる状態依存項を除外して、代数リカッチ不等式として扱うことで、双線形 H_∞ 状態フィードバック制御則を導出し、セミアクティブサスペンションに適用してその効果を実証している。この成果はその後の産業分野で応用・参考にされている [18][20]。嘉納らは熱交換器に対し、三平らの設計法を試している [21]。また、テラ展開の手法に基づく双線形 H_∞ 状態フィードバック制御器の設計法を示している [22]。佐々木と内田は、一般的な双線形入力システムを不確かなパラメータを持つ線形システムとみなし、微分ゲームの手法を用いて、2 本の状態依存リカッチ不等式と内部安定条件式により、2 種類の双線形 H_∞ 出力フィードバック制御則を示し、かつ、状態依存リカッチ不等式を満たす定数解の具体的な設計法として、状態の許容領域における状態依存項の最大・最小値を推定し、それらを用いて代数リカッチ不等式を解く手法を示した [23][24][25][26]。佐々木と内田の論文における制御則は、

児島らの論文と以下のように対応している。

- 佐々木と内田の【定理1】 \Leftrightarrow 児島らの鞍点解 (II)
- 佐々木と内田の【定理2】 \Leftrightarrow 児島らの鞍点解 (I)

しかしながら三平らの対象とする双線形モデルは特殊であり、線形入力が存在する双線形系には直接適用できない。設計においては本来状態依存のリカッチ不等式を満たす必要があるため、初めから厳しい条件の代数リカッチ不等式を解く必要があったり、解がハイゲインを与えたり、解が得られない場合もある。また、外乱の双線形項が存在すると代数リカッチ不等式に状態依存項が出現してくるため、定数解が得られなくなる。佐々木と内田の対象双線形モデルは線形入力が存在する双線形系にも適用可能であり、状態依存項の最大値が設定できれば双線形外乱を持つシステムにも適用可能な手法である。しかし、双線形項の最大値がシステムの限界値から求められるため一般的に値が大きくなり、最小値においては0となってしまう場合がある [27]。そのため、この手法も解がハイゲインになったり、解が得られない場合がある。テイラー展開による手法では、精度を上げるために高次で近似すると方程式が複雑かつ膨大になるために、取り扱いが困難となり、さらに、得られる解は平衡点近傍の局所解に留まる傾向もある [28]。また、従来の双線形 H_∞ 制御の研究は事前に定数解を得る手法が多いため、保守的な解を与えることが多い。

1.4 双線形オブザーバ

双線形オブザーバの研究は長く行われており、入力と状態量の積が双線形となるモデルの研究が一般的である。その特徴として「推定誤差の減衰が双線形項の入力に依存する」という問題がある。それに対し原と古田は推定誤差が入力に依存しない双線形オブザーバを提案し [29]、舟橋はそのオブザーバをリアプノフの概念を用いてさらに発展させた [30]。この2つの論文は双線形オブザーバをテーマとする論文でよく引用されている。しかし、この種の双線形オブザーバは固有値を任意に設定できるとは限らず、設計条件は一般に非常に厳しいものとなる。これに対し、古荘は推定誤差の減衰を保証する入力に対しては任意の固有値を設定する事が出来る双線形オブザーバを提案している [31][32]。

一方、外乱を考慮した双線形オブザーバとしては、Yang と Saif の故障検出分離 (fault detection and isolation: FDI)[33]、Zasadzinski らによる外乱分離オブザーバ (disturbance decoupled observer: DDO)[34] などが代表的である。しかし、Yang と Saif の双線形オブザーバは取り扱う次元が多く、設計手順も複雑である。Zasadzinski らの双線形オブザーバは推定誤差が入力に依存しないタイプのオブザーバであるため、やはり設計条件が非常に厳しくなっている。また、双線形外乱を考慮した双線形オブザーバは見受けられない。

1.5 SDRE 法

1.5.1 SDRE 法の概要

最近、計算機の発達とともに、状態依存リカッチ方程式手法 (SDRE 法) が非線形制御理論において徐々に注目を浴びつつある [35][36]。SDRE 法は非線形系を状態依存型係数 (state-dependent coefficient: SDC) 形式で表すことで、評価関数最小の条件式である HJE を状態依存リカッチ方程式 (SDRE) に置き換え、各時刻の状態量を SDRE に代入して、代数リカッチ方程式 (algebraic Riccati equation: ARE) をオンラインで解き、その解をその時刻のフィードバックゲインとして利用する手法である。状態量を時間毎に固定させて解くことから、SDRE は凍結リカッチ方程式 (frozen Riccati equation: FRE) とも呼ばれている [37][38]。オンラインで (なるべく小さなサンプリングタイムで) リカッチ方程式を解く必要があるため、ある程度の計算処理速度が要求される。しかし、「線形制御とほぼ同じ形をしたリカッチ方程式を時間毎に解く」という作業だけで非線形系を取り扱えるという点が、他の煩雑な非線形制御理論に対する強力なアドバンテージとなっている。従来使用してきた線形制御との比較が容易で評価の見通しも立て易く、実装において他の非線形制御理論に対して有利であるということが、SDRE 法を扱う論文で一般に強調されている。実装を検討したシミュレーション報告例のみならず [39][40][41][42][43][44]、実験報告例が多いのも特徴の一つである [45][46][47][48][49]。

SDRE 法は、HJE の近似解として実際に実時間で SDRE を解いてその効果を検証した 1996 年の J.R.Cloutier らの研究 [50] が初めと言われている。一般に適用される SDRE 法は、リアプノフ候補関数のある積分条件を満たす形式に限定し、それを HJE に代入して SDRE を導き、SDRE の解からフィードバックゲインを決定する方法である。当初、この形式において導かれる SDRE の解が本当

に HJE の解を与えるのか、大域的安定性を保証するリアプノフ関数が得られるのか、という点に関して厳密な理論展開がなされていなかったため、正統な非線形制御理論とは認識されず、SDRE と HJE との対応のみを示した研究 [37] や、SDRE の数値解から数値探索によりリアプノフ関数を求める研究 [28] などに留まっていた。しかし、最近になり、SDRE 法を正規の非線形制御理論とする論文が発表され [51][52]、SDRE 解が HJE 解になり、リアプノフ関数を与える条件が示されるなど [53]、急速に理論体系が整備されつつある。現在の SDRE 法の研究は、非線形系を SDC 形式に移行する際のフリーパラメータ決定方法や、その取扱いが議論の焦点となっている [54][55]。

1.5.2 拡張2次形式リアプノフ関数

非線形 H_∞ 制御では一般に、(I) ハミルトンヤコビ不等式 (HJI) を満たすことで H_∞ ノルム不等式条件を満たす事、(II) その時解いた HJE の解が大域的安定を保証するリアプノフ関数である事、の2つが望まれる。佐々木・内田は SDC 形式で表される非線形系に対し、HJI ではなく、拡張2次形式と言われるリアプノフ候補関数から、微分ゲームと同様の手法で H_∞ ノルム不等式条件を満たす状態依存リカッチ不等式 (state dependent Riccati inequality: SDRI) を導き、その SDRI を満たす SDRE の解が大域安定性を保証することを示した [25][56][57][58][59][60]。このことは、SDC 形式の非線形系において、この拡張2次形式リアプノフ候補関数が、(I) HJI を満たす解であり、(II) リアプノフ関数になる事、を直接的に示している。一方、積分条件を設定した SDRE の解は、拡張2次形式から得られた SDRE の解とその解の時間変動分との和の形を取っており、拡張2次形式の SDRE に比べて保守的であり、解が直接リアプノフ関数を与えないという問題を持っている。また、その正定性の条件は比較的厳しいものとなる。これらのことは [25] や [56] で詳しく述べられている。

SDC 形式の非線形系に対するオブザーバを併用した状態制御器との閉ループ安定性の証明は、HJE から議論を始めると非常に難しくなるが、拡張2次形式リアプノフ候補関数から議論を始めると比較的容易に理論展開が行える (この場合、制御則は HJE ではなく SDRE に帰着する)。現在、拡張2次形式リアプノフ関数は SDRE 法の研究においてはあまり注目されていないが、以上の点から考慮しても、拡張2次形式リアプノフ関数は、SDRE 法に基づく安定論を論じる上で有力な手段となると考えられる。

1.5.3 SDRE 法に基づく双線形 H_∞ 出力制御

双線形システムを SDC 形式で表すと、双線形項は SDC の一つとみなされるので、双線形 H_∞ 制御問題に SDRE 法を適用する事が出来る。拡張 2 次形式リアプノフ候補関数を用い、[23] や [57] を参考に、微分ゲームの手法に従って双線形 H_∞ 出力制御則を求める際、

- Glover と Doyle 論文の制御則

リアプノフ候補関数「推定状態量の拡張 2 次形式 + 推定誤差の拡張 2 次形式」から導かれる

- DGKF 論文の制御則

リアプノフ候補関数「状態量の拡張 2 次形式 + 推定誤差の拡張 2 次形式」から導かれる

の 2 種類の制御則が考えられる。DGKF 論文に従った双線形 H_∞ 出力制御では、リカッチ方程式の係数が状態量に依存する。これに対し、Glover と Doyle の論文に従った双線形 H_∞ 出力制御では、リカッチ方程式の係数が推定量に依存するので、より実用的な制御則が期待できる。

しかし、このタイプの制御則に対しては使用上配慮しなければならない点がいくつかある。

- * H_∞ 状態制御則ではフィードバックゲインに関したリカッチ方程式を解くのみで済むのに対し、 H_∞ 出力制御則ではフィードバックゲインとオブザーバゲインに関したリカッチ方程式を解く必要がある。
- * DGKF 論文の H_∞ オブザーバは最悪外乱が想定されており [61]、それ以外の外乱に対しては精度が悪くなる。Glover と Doyle の論文は DGKF 論文と同様に微分ゲームの最小最大設計（最悪ケース設計）であるため [5]、これらの 2 つの論文に従った H_∞ 出力制御則ではオブザーバゲインかフィードバックゲインのどちらかがかなりのハイゲインになる可能性があり [62][63]、フィードバックゲイン・オブザーバゲインの両方のゲインを調整するためには、システムに適切な「重み」要素を追加しなければならない [62]。
- * H_∞ 状態制御則では 1 つの直交条件のみを満たせば良いが、 H_∞ 出力制御則では 2 つの直交条件を満たす必要がある。

よって Glover と Doyle 論文や DGKF 論文の解法に沿って双線形 H_∞ 出力制御則を求める場合、設計に手間が掛かり、双線形 H_∞ オブザーバの推定精度も悪くなる可能性がある。また、最小最大設

計であるため、極めて保守的となる可能性がある。そのため、双線形オブザーバを併用した双線形 H_∞ 状態制御の方が制御性能・推定性能共に双線形 H_∞ 出力制御を上回る可能性がある。

一般的に、SDC 形式の非線形 H_∞ 制御則は、線形行列不等式 (linear matrix inequality: LMI) 形式で表記される場合が多い。しかし、SDRI(又は SDRE) を Schur complement により LMI 形式に移行する手間があり、オンラインで LMI を解く事は実装上困難である。

1.6 本論文の概要

本論文では双線形外乱を持つ双線形システムに対する、双線形 H_∞ 出力フィードバック制御と双線形オブザーバ H_∞ 制御について考察する。その際、双線形オブザーバとして双線形全次元オブザーバと双線形外乱分離オブザーバの2種類を提案する。双線形全次元オブザーバは [31][32] の双線形オブザーバを双線形外乱に拡張したものであり、双線形外乱分離オブザーバは離散時間型分散制御系の可観測性の研究のために設計されたオブザーバ [64][65] を本システムに拡張したものである。これらの双線形 H_∞ 制御器と双線形オブザーバに対し、拡張2次形式リアプノフ関数に基づいた SDRE 法を適用して

- (1) 双線形 H_∞ 出力フィードバック制御の内部安定性とロバスト性
- (2) 双線形全次元オブザーバと双線形外乱分離オブザーバの推定誤差の有界性
- (3) 双線形オブザーバ H_∞ 制御の内部安定性とロバスト性

に対する十分条件を明らかにする。

さらに、提案した制御則の性能を評価するために、未知外乱流量下での入力流量による熱交換器の温度制御を考える。外乱は熱交換器利用者による予測できない使用流量等を想定している。熱交換器の動特性は偏微分方程式で記述されるため、重み付き残差法 (method of weighted residuals: MWR) を用いて定常状態周りで双線形システムに近似する [21][22][31][32][66][67][68][69]。そのシステムは次のような特徴を持っている。

- (a) 動的システムは双線形入力項だけでなく双線形外乱項を持つ双線形システムとしてモデル化するのが自然である。

(b) 状態ベクトルは物理量を持たない一般化フーリエ係数で構成されるため、状態ベクトルを直接観測することはできない。

(c) 熱交換器の構造上の理由から、入口・出口もしくは幾つかのポイントでしか温度を計測する事が出来ない。よって、内部分布温度を知るためには適切な推定器に頼らなければならない。

特徴 (a) は大きな外乱流量に対して良い制御性能を得るため必要である。また、特徴 (b) と (c) によって、高精度の双線形オブザーバを構成する必要があることが分かる。そこで、このシステムに対して提案した制御器やオブザーバを適用し、シミュレーションと実機実験によって、その実システムへの適用可能性と有効性を示す。

1.7 本論文の構成

本論文の構成は次のようになっている。第2章では、双線形外乱項を持つ双線形システムに対して H_∞ 制御一般化プラントを定式化し、拡張2次形式リアプノフ候補関数を定義する。その後、SDRE法を用いて双線形状態フィードバック制御則と双線形出力フィードバック制御則を導き、その制御則の下での内部安定性・ロバスト性を保証する十分条件を示す。第3章においては、双線形外乱を持つ双線形システムに対して双線形全次元オブザーバと双線形外乱分離オブザーバを提案する。この2つのオブザーバに対して拡張2次形式リアプノフ候補関数とSDRE法を用いて、誤差が有界となる十分条件を示し、その誤差限界を与える。第4章において、2章で求めた双線形状態フィードバック制御則と、3章で求めた双線形全次元オブザーバあるいは双線形外乱分離オブザーバを併用したオブザーバレギュレータを構成し、同様の手法を用いて内部安定性・ロバスト性を検討し、その十分条件を与える。第5章において、双線形熱交換器モデルに対する H_∞ 制御一般化プラントの構築を行う。第6章においては、求めた3種類の制御器: 双線形 H_∞ 出力フィードバック制御器・双線形全次元オブザーバ H_∞ 制御器・双線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御器と、それに付随する3つのオブザーバ: 双線形 H_∞ オブザーバ・双線形全次元オブザーバ・双線形外乱分離オブザーバを、熱交換器へ適用してシミュレーション実験と実機実験を行い、その結果を考察して、本研究で提案した制御法の有効性を示す。第7章では本研究の成果をまとめ、今後の研究課題と総括を行う。

第2章 SDRE 法に基づく双線形 H_∞ 制御

この章では外乱双線形項を含む双線形システムに対し、[23] や [57] を参考に、拡張 2 次形式リアプノフ関数に基づき、SDRE 法を用いた双線形 H_∞ 状態フィードバック制御則と双線形 H_∞ 出力フィードバック制御則を導く。

2.1 定式化

以下の一般的な双線形システム (\mathcal{BLS}) を考える。

$$(\mathcal{BLS}) : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}_u(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_y\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は状態量ベクトル、 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ は計測出力ベクトル、 $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \dots \omega_{r_\omega}]^T \in \mathbb{R}^{r_\omega}$ は外乱ベクトル、 $\mathbf{u} = [u_1 \dots u_{r_u}]^T \in \mathbb{R}^{r_u}$ は入力ベクトルである。 $\mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})$ と $\mathbf{B}_u(\mathbf{x})$ は以下のように定義される。

$$\mathbf{B}_\omega(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_\omega + \{\mathbf{M}_\omega \mathbf{x}\}, \quad \mathbf{B}_u(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_u + \{\mathbf{M}_u \mathbf{x}\} \quad (2.2)$$

ここで

$$\{\mathbf{M}_\omega \mathbf{x}\} := \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\omega_1} \mathbf{x}, \mathbf{M}_{\omega_2} \mathbf{x}, \dots, \mathbf{M}_{\omega_{r_\omega}} \mathbf{x} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times r_\omega} \quad (2.3)$$

$$\{\mathbf{M}_u \mathbf{x}\} := \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{u_1} \mathbf{x}, \mathbf{M}_{u_2} \mathbf{x}, \dots, \mathbf{M}_{u_{r_u}} \mathbf{x} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times r_u} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{M}_{\omega_i}, \mathbf{M}_{u_j} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad i = 1, 2 \dots r_\omega, \quad j = 1, 2 \dots r_u$$

この時、以下の関係式が満たされる。

$$\{M_\omega x\}\omega = \langle M_\omega \omega \rangle x, \quad \{M_u x\}u = \langle M_u u \rangle x \quad (2.5)$$

ここで

$$\langle M_\omega \omega \rangle := \sum_{i=1}^{r_\omega} M_{\omega_i} \omega_i \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.6)$$

$$\langle M_u u \rangle := \sum_{j=1}^{r_u} M_{u_j} u_j \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.7)$$

H_∞ 制御設計のため、 (BLS) の一般化プラント $(GBLS)$ を以下のように定義する。

$$(GBLS) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_\omega(x)\omega + B_u(x)u \\ z = C_z x + D_u u \\ y = C_y x \end{cases} \quad (2.8)$$

ここで $z \in \mathbb{R}^p$ は評価出力ベクトルである。 $(GBLS)$ は (BLS) に評価出力 z が加えられたシステムであることに注意する。

定義 2.1 ベクトル v とベクトル値関数 $f(t)$ に対し、以下のノルムを定義する。

1. $\|v\|$ はユークリッドノルム $\sqrt{v^T v}$ である。
2. $\|f\|_2$ は二乗可積分空間 \mathcal{L}_2 のノルムであり、以下のように定義される。

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad f \in \mathcal{L}_2 \quad (2.9)$$

3. $f \in \mathcal{L}_{2\rho}$ は全ての $t \in [0, \infty)$ に対し $f \in \mathcal{L}_2$ かつ $\|f(t)\| < \rho$ を示す。 □

2.2 双線形 H_∞ 状態フィードバック制御則

この節では (\mathcal{GBLS}) に対し、 $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ であると仮定して双線形 H_∞ 状態フィードバック制御則を導く。 (\mathcal{GBLS}) を次のように定義し直す。

$$(\mathcal{GBLS}) : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}_u(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_z\mathbf{x} + \mathbf{D}_u\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{x} \end{cases} \quad (2.10)$$

仮定 2.1 (\mathcal{GBLS}) に対し、以下を仮定する。

1. $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_z)$ は可観測対である。
2. 以下の直交条件が満たされている。

$$\mathbf{D}_u^T [\mathbf{C}_z \ \mathbf{D}_u] = [\mathbf{O} \ \mathbf{I}] \quad (2.11)$$

□

仮定 2.1 の (2.11) より、以下の式が導ける。

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z \mathbf{x} + \|\mathbf{u}\|^2 \quad (2.12)$$

次に $\Delta \mathbf{X}(\mathbf{x}(t))$, $\Delta \mathbf{X}_{sub}(\mathbf{x}(t))$ を以下のように定義する。

$$\Delta \mathbf{X}(\mathbf{x}) := \dot{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{X}_{sub}(\mathbf{x}) \quad (2.13)$$

$$\Delta \mathbf{X}_{sub}(\mathbf{x}) :=$$

$$\mathbf{X}(\mathbf{x})\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{X}(\mathbf{x}) - \mathbf{X}(\mathbf{x}) \left(\mathbf{B}_u(\mathbf{x})\mathbf{B}_u^T(\mathbf{x}) - \gamma^{-2} \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})\mathbf{B}_\omega^T(\mathbf{x}) \right) \mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z \quad (2.14)$$

ここで $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ は次の定理で与えられる正定値対称行列であり、 γ は適当な正の数であるとする。

定理 2.1 (i) $\mathbf{X}(\mathbf{x}(t))$ はある正の数 ε_x と任意の \mathbf{x} ($\neq \mathbf{o}$) に対し以下の SDRE を満たすとする。

$$(\text{SDRE}-\mathbf{X}) \quad : \quad \Delta \mathbf{X}_{sub}(\mathbf{x}) = -\varepsilon_x \mathbf{I} \quad (2.15)$$

(ii) $\mathbf{X}(\mathbf{x}(t))$ は次の SDRI を満たすとする

$$(\text{SDRI}-\mathbf{X}) \quad : \quad \Delta \mathbf{X}(\mathbf{x}) < \mathbf{0} \quad (2.16)$$

この時、以下のコントローラ

$$\mathbf{u} = -\mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (2.17)$$

は (GBLS) の内部安定性を保証し、 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{o}$ のとき十分小さな $\rho > 0$ において以下の H_∞ ノルム不等式条件を満足する。

$$\|\mathbf{z}\|_2 < \gamma \|\boldsymbol{\omega}\|_2, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}_{2\rho} \ (\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{o}) \quad (2.18)$$

□

証明 リアプノフ候補関数を以下のような状態量の拡張 2 次形式 V_x で定義する。

$$V_x(t) = \mathbf{x}^T \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \quad (2.19)$$

直交条件による (2.12) と $\mathbf{u} = -\mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ に注意すると、 V_x の時間微分は以下で表せる。

$$\begin{aligned} \dot{V}_x(t) &= \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{X}(\mathbf{x}) \left(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}_u(\mathbf{x})\mathbf{u} \right) \\ &\quad + \left(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}_u(\mathbf{x})\mathbf{u} \right)^T \mathbf{X}(\mathbf{x})\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \left(\dot{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{X} \right) \mathbf{x} - 2\|\mathbf{u}\|^2 + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{B}_\omega^T(\mathbf{x})\mathbf{X}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{X} \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})\boldsymbol{\omega} \\ &= \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{X}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \|\mathbf{z}\|^2 - \gamma^{-2} \mathbf{x}^T \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x}) \mathbf{B}_\omega^T(\mathbf{x}) \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \\ &\quad + \mathbf{x}^T \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{B}_\omega^T(\mathbf{x}) \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \|\mathbf{z}\|^2 + \gamma^2 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 - \gamma^2 \left\| \boldsymbol{\omega} - \gamma^{-2} \mathbf{B}_\omega^T(\mathbf{x}) \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \right\|^2 \quad (2.20)$$

◆ 内部安定性

ここで内部安定性を示す。 $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{o}$ かつ $\Delta \mathbf{X}(\mathbf{x}) < \mathbf{0}$ とき、(2.20) 式から以下の不等式を導ける。

$$\dot{V}_x(t) = \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \|\mathbf{z}\|^2 - \gamma^{-2} \left\| \mathbf{B}_\omega^T(\mathbf{x}) \mathbf{X}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \right\|^2 < 0 \quad (2.21)$$

V_x は下に有界であるので

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}_x(t) = 0 \quad (2.22)$$

よって (2.21) の各項は $t \rightarrow \infty$ で 0 となる。これは $\|\mathbf{z}\|^2$ に対して以下が成り立つ事を意味している。

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{u} \rightarrow 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_z \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{o}, \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{o} \quad (2.23)$$

これより、(GBLS) は以下になる。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_z \mathbf{x} = \mathbf{o} \end{cases} \quad (2.24)$$

$(\mathbf{A}, \mathbf{C}_z)$ は可観測対であるため、 $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ と結論づける事が出来る。よって、(GBLS) は内部安定である。

◆ ロバスト性

次に、 H_∞ ノルム不等式条件 (2.18) を示す。 $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{o}$ かつ $\Delta \mathbf{X}(\mathbf{x}) < \mathbf{0}$ とき、(2.20) は以下のように簡略化できる

$$\dot{V}_x(t) < -\|\mathbf{z}\|^2 + \gamma^2 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \quad (2.25)$$

$\mathbf{x}(0) = \mathbf{o}$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}_{2\rho}$ とき、十分小さな ρ に対して (2.21) より $\mathbf{x}(t)$ は原点近傍に留まる。 $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}_{2\rho}$ は $\boldsymbol{\omega} \rightarrow \mathbf{o}$ を意味するため、付録 A の定理 A.1 より $t \rightarrow \infty$ とき $\boldsymbol{\omega} \rightarrow \mathbf{o}$, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{o}$ となる。このとき (2.25)

の両辺を $t = [0, \infty)$ で積分すると

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \dot{V}_x(t) dt &< - \int_0^\infty \|z\|^2 dt + \gamma^2 \int_0^\infty \|\omega\|^2 dt \\
 \Leftrightarrow V_x(\infty) - V_x(0) &< -\|z\|_2^2 + \gamma^2 \|\omega\|_2^2 \\
 \Leftrightarrow 0 &< -\|z\|_2^2 + \gamma^2 \|\omega\|_2^2 \\
 \Leftrightarrow \|z\|_2^2 &< \gamma^2 \|\omega\|_2^2
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

となるため、以下の条件式 (2.18) を証明できる。

$$\|z\|_2 < \gamma \|\omega\|_2 \tag{2.27}$$

■

注意 2.1 ($SDRE-X$) の ε_x は、 $\Delta X(x)$ と \dot{V}_x に許容を与えるように加える。

注意 2.2 定理 2.1 は以下のように使用する。

- コントローラ設計

($SDRE-X$) をオンラインで解き、その時の解 $X(x)$ をコントローラ $u = -B_u^T(x)X(x)x$ に使用する。

- 安定性チェック

($SDRE-X$) の解 $X(x)$ が、条件 ($SDRI-X$) を満たしている時、閉ループ安定性が保証される。

ΔX に含まれる \dot{X} は、以下の式で計算する。

$$\dot{X} = \frac{X(t) - X(t - \delta t)}{\delta t} \tag{2.28}$$

ここで δt はサンプリングタイムである。

2.3 双線形 H_∞ 出力フィードバック制御則

この節では (\mathcal{GBLS}) に対し、双線形 H_∞ 出力フィードバック制御則を導く。 H_∞ 出力制御の直交条件を満たすために、 (\mathcal{GBLS}) の計測出力 \mathbf{y} の式に外乱項 $\mathbf{D}_\omega \boldsymbol{\omega}$ を加え、次のように定義し直す。

$$(\mathcal{GBLS}) : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}_u(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_z\mathbf{x} + \mathbf{D}_u\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_y\mathbf{x} + \mathbf{D}_\omega\boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (2.29)$$

仮定 2.2 (\mathcal{GBLS}) に対し、以下を仮定する。

1. $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_z)$ と $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_y)$ は可観測対である。
2. 以下の2つの直交条件が満たされている。

$$\mathbf{D}_u^T [\mathbf{C}_z \quad \mathbf{D}_u] = [\mathbf{O} \quad \mathbf{I}] \quad (2.30)$$

$$\mathbf{D}_\omega [\mathbf{B}_\omega^T(\mathbf{x}) \quad \mathbf{D}_\omega^T] = [\mathbf{O} \quad \mathbf{I}], \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.31)$$

□

つぎに $\Delta \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})$, $\Delta \mathbf{Y}_{sub}(\hat{\mathbf{x}})$, $\Delta \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}})$, $\Delta \mathbf{S}_{sub}(\hat{\mathbf{x}})$ を以下のように定義する。

$$\Delta \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) := \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \frac{d}{dt} \left(\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} \right) \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) + \Delta \mathbf{Y}_{sub}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.32)$$

$$\Delta \mathbf{Y}_{sub}(\hat{\mathbf{x}}) := \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \left(\mathbf{C}_y^T \mathbf{C}_y - \gamma^{-2} \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z \right) \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}_\omega(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{B}_\omega(\hat{\mathbf{x}})^T \quad (2.33)$$

$$\Delta \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) := \dot{\mathbf{S}}(\hat{\mathbf{x}}) + \Delta \mathbf{S}_{sub}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{S}_{sub}(\hat{\mathbf{x}}) := & \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \left(\mathbf{A} + \gamma^{-2} \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z \right) + \left(\mathbf{A} + \gamma^{-2} \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z \right)^T \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \\ & - \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \left(\mathbf{B}_u(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{B}_u(\hat{\mathbf{x}})^T - \gamma^{-2} \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{C}_y^T \mathbf{C}_y \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \right) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z \end{aligned} \quad (2.35)$$

ここで $\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})$, $\mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}})$ は次の定理で与えられる正定値対称行列であり、 γ は適当な正の数であるとする。

定理 2.2 (i) $\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}(t))$ は正の数 ε_e と任意の $\hat{\mathbf{x}} (\neq \mathbf{o})$ に対し、以下の SDRE を満たすとする。

$$(\text{SDRE}-\mathbf{Y}) : \Delta \mathbf{Y}_{sub}(\hat{\mathbf{x}}) = -\varepsilon_e \mathbf{I} \quad (2.36)$$

(ii) $\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}(t))$ と $\mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}(t))$ は正の数 $\varepsilon_{\hat{\mathbf{x}}}$ と任意の $\hat{\mathbf{x}} (\neq \mathbf{o})$ に対し、以下の SDRE を満たすとする。

$$(\text{SDRE}-\mathbf{S}) : \Delta \mathbf{S}_{sub}(\hat{\mathbf{x}}) = -\varepsilon_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{I} \quad (2.37)$$

(iii) $\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})$ と $\mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}})$ が以下の不等式を満たすとする。

$$\begin{aligned} \Delta U(t) &:= \hat{\mathbf{x}}^T \Delta \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} + \gamma^2 (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} \left(\Delta \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \langle \mathbf{M}_u \mathbf{u} \rangle^T + \langle \mathbf{M}_u \mathbf{u} \rangle \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x}) \mathbf{B}_\omega^T(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_\omega(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{B}_\omega^T(\hat{\mathbf{x}}) \right) \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) < 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

この時、双線形 H_∞ オブザーバを (\mathcal{BHO}) と表記した以下のコントローラ

$$(\mathcal{BHO}-\mathcal{C}) : \begin{cases} (\mathcal{BHO}) : \begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_u(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{u} + \gamma^{-2} \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z \hat{\mathbf{x}} \\ \quad + \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{C}_y^T (\mathbf{y} - \mathbf{C}_y \hat{\mathbf{x}}) \end{cases} \\ \mathbf{u} = -\mathbf{B}_u^T(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (2.39)$$

は (\mathcal{GBLS}) の内部安定性を保証し、 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{o}$, $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{o}$ と十分小さな $\rho > 0$ において以下の H_∞ ノルム不等式条件を満足する。

$$\|\mathbf{z}\|_2 < \gamma \|\boldsymbol{\omega}\|_2, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}_{2\rho} (\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{o}) \quad (2.40)$$

□

証明 初めに、以下のような推定状態量の拡張 2 次形式 $V_{\hat{\mathbf{x}}}$ を考える。

$$V_{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} \quad (2.41)$$

(GBLS) のシステム方程式は $e = x - \hat{x}$ とすると、以下のように書き換える事が出来る。

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_u(\hat{x})u + \gamma^{-2}Y(\hat{x})C_z^T C_z \hat{x} + Y(\hat{x})C_y^T (C_y x + D_\omega \omega - C_y \hat{x}) \\ &= \left(A + \gamma^{-2}Y(\hat{x})C_z^T C_z \right) \hat{x} + B_u(\hat{x})u + Y(\hat{x})C_y^T (C_y e + D_\omega \omega)\end{aligned}\quad (2.42)$$

これより、 $V_{\hat{x}}$ の時間微分は $u = -B_u^T(\hat{x})S(\hat{x})\hat{x}$ に注意すると以下で与えられる。

$$\begin{aligned}\dot{V}_{\hat{x}}(t) &= \hat{x}^T \dot{S}(\hat{x})\hat{x} + \hat{x}^T S(\hat{x}) \left(\left(A + \gamma^{-2}Y(\hat{x})C_z^T C_z \right) \hat{x} + B_u(\hat{x})u + Y(\hat{x})C_y^T (C_y e + D_\omega \omega) \right) \\ &\quad + \left(\left(A + \gamma^{-2}Y(\hat{x})C_z^T C_z \right) \hat{x} + B_u(\hat{x})u + Y(\hat{x})C_y^T (C_y e + D_\omega \omega) \right)^T S(\hat{x})\hat{x} \\ &= \hat{x}^T \left(\dot{S}(\hat{x}) + S(\hat{x}) \left(A + \gamma^{-2}Y(\hat{x})C_z^T C_z \right) + \left(A + \gamma^{-2}Y(\hat{x})C_z^T C_z \right)^T S(\hat{x}) \right) \hat{x} - 2\|u\|^2 \\ &\quad + (C_y e + D_\omega \omega)^T C_y Y(\hat{x})S(\hat{x})\hat{x} + \hat{x}^T S(\hat{x})Y(\hat{x})C_y^T (C_y e + D_\omega \omega) \\ &= \hat{x}^T \Delta S(\hat{x})\hat{x} - \|u\|^2 - \hat{x}^T \left(\gamma^{-2}S(\hat{x})Y(\hat{x})C_y^T C_y Y(\hat{x})S(\hat{x}) + C_z^T C_z \right) \hat{x} \\ &\quad + (C_y e + D_\omega \omega)^T C_y Y(\hat{x})S(\hat{x})\hat{x} + \hat{x}^T S(\hat{x})Y(\hat{x})C_y^T (C_y e + D_\omega \omega)\end{aligned}\quad (2.43)$$

次に、以下のような推定誤差の拡張2次形式 V_e を考える。

$$V_e(t) = e^T Y(\hat{x})^{-1} e \quad (2.44)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= \left(Ax + B_\omega(x)\omega + B_u(x)u \right) \\ &\quad - \left(A\hat{x} + B_u(\hat{x})u + \gamma^{-2}Y(\hat{x})C_z^T C_z \hat{x} + Y(\hat{x})C_y^T (C_y e + D_\omega \omega) \right) \\ &= \left(Ax + B_\omega(x)\omega + B_u u + \langle M_u u \rangle x \right) \\ &\quad - \left(A\hat{x} + B_u u + \langle M_u u \rangle \hat{x} + \gamma^{-2}Y(\hat{x})C_z^T C_z \hat{x} + Y(\hat{x})C_y^T (C_y e + D_\omega \omega) \right) \\ &= \left(A + \langle M_u u \rangle - Y(\hat{x})C_y^T C_y \right) e + \left(B_\omega(x) - Y(\hat{x})C_y^T D_\omega \right) \omega - \gamma^{-2}Y(\hat{x})C_z^T C_z \hat{x}\end{aligned}\quad (2.45)$$

である。これより、 V_e の時間微分は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}
\dot{V}_e &= e^T \frac{d}{dt} (Y(\hat{x})^{-1}) e \\
&\quad + e^T Y(\hat{x})^{-1} \left((A + \langle M_u u \rangle - Y(\hat{x}) C_y^T C_y) e \right. \\
&\quad \quad \left. + (B_\omega(x) - Y(\hat{x}) C_y^T D_\omega) \omega - \gamma^{-2} Y(\hat{x}) C_z^T C_z \hat{x} \right) \\
&\quad + \left((A + \langle M_u u \rangle - Y(\hat{x}) C_y^T C_y) e \right. \\
&\quad \quad \left. + (B_\omega(x) - Y(\hat{x}) C_y^T D_\omega) \omega - \gamma^{-2} Y(\hat{x}) C_z^T C_z \hat{x} \right)^T Y(\hat{x})^{-1} e \\
&= e^T Y(\hat{x})^{-1} \left(\Delta Y(\hat{x}) + \langle M_u u \rangle Y(\hat{x}) + Y(\hat{x}) \langle M_u u \rangle^T \right) Y(\hat{x})^{-1} e \\
&\quad - e^T \left(C_y^T C_y + \gamma^{-2} C_z^T C_z + Y(\hat{x})^{-1} B_\omega(\hat{x}) B_\omega^T(\hat{x}) Y(\hat{x})^{-1} \right) e \\
&\quad + e^T \left(Y(\hat{x})^{-1} B_\omega(x) - C_y^T D_\omega \right) \omega + \omega^T \left(B_\omega^T(x) Y(\hat{x})^{-1} - D_\omega^T C_y^T \right) e \\
&\quad - \gamma^{-2} \left(e^T C_z C_z \hat{x} + \hat{x}^T C_z^T C_z e \right) \tag{2.46}
\end{aligned}$$

最後に、拡張2次形式リアプノフ候補関数 V を、(2.41) に $\gamma^2 \times (2.44)$ を加えた以下の式で定義する。

$$V(t) = V_{\hat{x}}(t) + \gamma^2 V_e(t) \tag{2.47}$$

(2.38) を使い、(2.43) と (2.46) を組み合わせると、 V の時間微分は以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \dot{V}_{\hat{x}}(t) + \gamma^2 \dot{V}_e(t) \\
&= \Delta U(t) - \|u\|^2 - \hat{x}^T \left(\gamma^{-2} S(\hat{x}) Y(\hat{x}) C_y^T C_y Y(\hat{x}) S(\hat{x}) + C_z^T C_z \right) \hat{x} \\
&\quad + \left(C_y e + D_\omega \omega \right)^T C_y Y(\hat{x}) S(\hat{x}) \hat{x} + \hat{x}^T S(\hat{x}) Y(\hat{x}) C_y^T \left(C_y e + D_\omega \omega \right) \\
&\quad - \gamma^2 e^T \left(C_y^T C_y + C_z^T C_z + Y(\hat{x})^{-1} B_\omega(x) B_\omega^T(x) Y(\hat{x})^{-1} \right) e \\
&\quad + \gamma^2 e^T \left(Y(\hat{x})^{-1} B_\omega(x) - C_y^T D_\omega \right) \omega \\
&\quad + \gamma^2 \omega^T \left(B_\omega(x) Y(\hat{x})^{-1} - D_\omega^T C_y^T \right) e - \left(e^T C_z C_z \hat{x} + \hat{x}^T C_z^T C_z e \right) \tag{2.48}
\end{aligned}$$

上式より、 $C_z^T C_z$ を含む項を集め、直交条件 (2.30) を用いると、

$$\begin{aligned}
& -\hat{\mathbf{x}}^T C_z^T C_z \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{e}^T C_z^T C_z \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^T C_z^T C_z \mathbf{e} - \mathbf{e}^T C_z^T C_z \mathbf{e} \\
& = -(\mathbf{e} + \hat{\mathbf{x}})^T C_z^T C_z (\mathbf{e} + \hat{\mathbf{x}}) \\
& = -\mathbf{x}^T C_z^T C_z \mathbf{x} = -\|\mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2
\end{aligned} \tag{2.49}$$

となる。よって式 (2.48) は

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) & = -\|\mathbf{z}\|^2 + \Delta U(t) - \gamma^{-2} \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) C_y^T C_y \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} \\
& + \left(C_y \mathbf{e} + D_\omega \boldsymbol{\omega} \right)^T C_y \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) C_y^T \left(C_y \mathbf{e} + D_\omega \boldsymbol{\omega} \right) \\
& - \gamma^2 \mathbf{e}^T \left(C_y^T C_y + \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} B_\omega(x) B_\omega^T(x) \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} \right) \mathbf{e} + \gamma^2 \mathbf{e}^T \left(\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} B_\omega(x) - C_y^T D_\omega \right) \boldsymbol{\omega} \\
& + \gamma^2 \boldsymbol{\omega}^T \left(B_\omega(x) \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} - D_\omega^T C_y^T \right) \mathbf{e}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

となる。次に $C_y^T C_y$ を含む項を集め、直交条件 (2.31) を用いると、

$$\begin{aligned}
& -\gamma^{-2} \hat{\mathbf{x}} \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) C_y^T C_y \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} \\
& + \mathbf{e}^T C_y^T C_y \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) C_y^T C_y \mathbf{e} - \gamma^2 \mathbf{e}^T C_y^T C_y \mathbf{e} \\
& = -\gamma^{-2} \left(\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} - \gamma^2 \mathbf{e} \right)^T C_y^T C_y \left(\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} - \gamma^2 \mathbf{e} \right) \\
& = -\gamma^{-2} \left(\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} - \gamma^2 \mathbf{e} \right)^T C_y^T D_\omega D_\omega^T C_y \left(\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} - \gamma^2 \mathbf{e} \right)
\end{aligned} \tag{2.51}$$

となる。よって、再び直交条件 (2.31) を用いると、式 (2.50) は

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) & = -\|\mathbf{z}\|^2 + \Delta U(t) + \gamma^2 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 - \gamma^2 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \\
& - \gamma^2 \left(\gamma^{-2} \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{e} \right) C_y^T D_\omega D_\omega^T C_y \left(\gamma^{-2} \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{e} \right) \\
& - \gamma^2 \mathbf{e}^T \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} B_\omega(x) B_\omega^T(x) \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} \mathbf{e} \\
& + \gamma^2 \boldsymbol{\omega}^T D_\omega^T C_y \left(\gamma^{-2} \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{e} \right) + \gamma^2 \left(\gamma^{-2} \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{e} \right)^T C_y^T D_\omega \boldsymbol{\omega} \\
& + \gamma^2 \mathbf{e}^T \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} B_\omega(x) \boldsymbol{\omega} + \gamma^2 \boldsymbol{\omega}^T B_\omega^T(x) \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} \mathbf{e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\|z\|^2 + \gamma^2 \|\omega\|^2 + \Delta U(t) \\
&\quad - \gamma^2 \left\| \omega - D_\omega^T C_y \left(\gamma^{-2} Y(\hat{x}) S(\hat{x}) \hat{x} - e \right) - B_\omega^T(x) Y(\hat{x})^{-1} e \right\|^2
\end{aligned} \tag{2.52}$$

となる。よって、

$$\dot{V}(t) = -\|z\|^2 + \gamma^2 \|\omega\|^2 + \Delta U(t) - \gamma^2 \|\omega - \bar{\omega}\|^2 \tag{2.53}$$

を得る。ここで、最悪外乱 $\bar{\omega}$ は以下の式で与えられる。

$$\bar{\omega} = D_\omega^T C_y \left(\gamma^{-2} Y(\hat{x}) S(\hat{x}) \hat{x} - e \right) + B_\omega^T(x) Y(\hat{x})^{-1} e \tag{2.54}$$

◆ 内部安定性

ここで内部安定性を示す。 $\omega \equiv o$ かつ $\Delta U(t) < 0$ とき、(2.53) から以下の不等式を導ける。

$$\dot{V}(t) = \Delta U(t) - \|z\|^2 - \gamma^2 \|\bar{\omega}\|^2 < 0 \tag{2.55}$$

V は下に有界であるので、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0 \tag{2.56}$$

よって (2.55) の各項は $t \rightarrow \infty$ で 0 となる。これは $\|z\|^2$ に対して以下が成り立つ事を意味している。

$$\|z\|^2 = x^T C_z^T C_z x + u^T u \rightarrow 0, \quad \Rightarrow \quad C_z x \rightarrow o, \quad u \rightarrow o \tag{2.57}$$

これより、(GBLS) は以下になる。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ z = C_z x = o \end{cases} \tag{2.58}$$

(A, C_z) は可観測対であるため、 $x = o$ と結論づける事が出来る。よって、(GBLS) は内部安定である。

◆ ロバスト性

次に、 H_∞ ノルム不等式条件 (2.40) を示す。 $\omega \neq \mathbf{o}$ かつ $\Delta U(t) < 0$ とき、(2.53) は以下のように簡略化できる。

$$\dot{V}(t) < -\|z\|^2 + \gamma^2 \|\omega\|^2 \quad (2.59)$$

$x(0) = \mathbf{o}$, $\hat{x}(0) = \mathbf{o}$, $\omega \in \mathcal{L}_{2\rho}$ とき、十分小さな ρ に対して (2.55) より $x(t)$, $\hat{x}(t)$ は原点近傍に留まる。 $\omega \in \mathcal{L}_{2\rho}$ は $\omega \rightarrow \mathbf{o}$ を意味するため、定理 A.1 より $t \rightarrow \infty$ とき $\omega \rightarrow \mathbf{o}$, $x \rightarrow \mathbf{o}$, $\hat{x} \rightarrow \mathbf{o}$ となる。このとき (2.59) の両辺を $t = [0, \infty)$ で積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{V}(t) dt &< -\int_0^\infty \|z\|^2 dt + \gamma^2 \int_0^\infty \|\omega\|^2 dt \\ \Leftrightarrow V(\infty) - V(0) &< -\|z\|_2^2 + \gamma^2 \|\omega\|_2^2 \\ \Leftrightarrow 0 &< -\|z\|_2^2 + \gamma^2 \|\omega\|_2^2 \\ \Leftrightarrow \|z\|_2^2 &< \gamma^2 \|\omega\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.60)$$

となるため、以下の条件式 (2.40) を証明できる。

$$\|z\|_2 < \gamma \|\omega\|_2 \quad (2.61)$$

■

注意 2.3 ($SDRE-Y$) での ε_e は $\Delta Y(\hat{x})$ と \dot{V}_e に許容を与えるように加え、($SDRE-S$) での $\varepsilon_{\hat{x}}$ は $\Delta S(\hat{x})$ と $\dot{V}_{\hat{x}}$ に許容を与えるように加える。

注意 2.4 定理 2.2 は以下のように使用する。

● コントローラ設計

($SDRE-Y$), ($SDRE-S$) をオンラインで解き、その時の解 $Y(\hat{x})$, $S(\hat{x})$ を ($BHO-C$) に使用する。

● 安定性チェック

($SDRE-Y$), ($SDRE-S$) の解 $Y(\hat{x})$, $S(\hat{x})$ が、条件 $\Delta U(t) < 0$ を満たしている時、閉ループ安定性が保証される。 ΔY , ΔS に含まれる $d(Y^{-1})/dt$, \dot{S} は、以下の式で計算する。

$$\frac{d}{dt}(Y^{-1}) = \frac{Y^{-1}(t) - Y^{-1}(t - \delta t)}{\delta t}, \quad \dot{S} = \frac{S(t) - S(t - \delta t)}{\delta t} \quad (2.62)$$

第3章 双線形外乱項を考慮した双線形オブザーバの設計

ここでは2章で定義された以下の双線形システム

$$(BLS) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_\omega(x)\omega + B_u(x)u \\ y = C_y x \end{cases}$$

これに対し2種類の双線形オブザーバを提案する。

3.1 双線形全次元オブザーバ

この章では (BLS) に対し、[31][32] の双線形オブザーバを双線形外乱に拡張した「双線形全次元オブザーバ」を考える。

仮定 3.1 (BLS) に対し、以下を仮定する。

1. すべてのシステムパラメタは既知である。
2. 外乱 ω は有界であり、 $\|\omega\| \leq \omega_B$ となるような正の値 ω_B が存在する。
3. (A, C_y) は可観測対である。

□

(BLS) の推定状態量を \hat{x} とした時、以下の双線形全次元オブザーバ (BFO) を考える。

$$(BFO) : \dot{\hat{x}} = \left(A + \langle M_u u \rangle \right) \hat{x} + B_u u + L(y - C_y \hat{x})$$

(3.1)

ここで \mathbf{L} はオブザーバゲインであり定数行列である。誤差ベクトルを $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ とすると、誤差方程式は以下になる。

$$\dot{\mathbf{e}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}_y + \langle \mathbf{M}_u \mathbf{u} \rangle \right) \mathbf{e} + \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})\boldsymbol{\omega} \quad (3.2)$$

次に、このオブザーバの有界収束定理を導く。まず初めに、 $\Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{x}}(t))$, $\Delta \mathbf{Y}_{sub}(\mathbf{u}(t), \hat{\mathbf{x}}(t))$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) &:= \dot{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) + \Delta \mathbf{Y}_{sub}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \\ &\quad + \beta^{-2} \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \left(\mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})\mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})^T - \mathbf{B}_\omega(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{B}_\omega(\hat{\mathbf{x}})^T \right) \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Y}_{sub}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) &:= \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \left(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}_y + \langle \mathbf{M}_u \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{2} \lambda^2 \mathbf{I} \right) \\ &\quad + \left(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}_y + \langle \mathbf{M}_u \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{2} \lambda^2 \mathbf{I} \right)^T \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \\ &\quad + \beta^{-2} \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{B}_\omega(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{B}_\omega(\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここで $\mathbf{Y}(\mathbf{u}(t), \hat{\mathbf{x}}(t))$ は次の定理で与えられる正定値対称行列であり、 β , λ は適当な正の数とする。

定理 3.1 (i) $\mathbf{Y}(\mathbf{u}(t), \hat{\mathbf{x}}(t))$ は軌跡 $\mathbf{u}(t)$, $\hat{\mathbf{x}}(t)$ と正の数 ε_e に対し、以下の SDRE を満たすとする。

$$(\text{SDRE} - \mathbf{Y}) : \Delta \mathbf{Y}_{sub}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) = -\varepsilon_e \mathbf{I} \quad (3.5)$$

(ii) この $\mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}})$ が以下の不等式を満たすとする。

$$\Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) < \mathbf{0} \quad (3.6)$$

この時、誤差ベクトル \mathbf{e} は有界に収まる。 \square

証明 リアプノフ候補関数を以下のような推定誤差の拡張2次形式 V_e で定義する。

$$V_e(t) = \mathbf{e}^T \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{e} \quad (3.7)$$

V_e の時間微分は以下になる。

$$\begin{aligned}
\dot{V}_e(t) &= \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{e} \\
&\quad + \mathbf{e}^T \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \left(\left(\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}_y + \langle \mathbf{M}_u \mathbf{u} \rangle \right) \mathbf{e} + \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x}) \boldsymbol{\omega} \right) \\
&\quad + \left(\left(\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}_y + \langle \mathbf{M}_u \mathbf{u} \rangle \right) \mathbf{e} + \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x}) \boldsymbol{\omega} \right)^T \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{e} \\
&= \mathbf{e}^T \Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{e} - \lambda^2 V_e(t) + \beta^2 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 - \beta^{-2} \left\| \beta^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})^T \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{e} \right\|^2 \quad (3.8)
\end{aligned}$$

もし、 $\Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}$ が満足されるとき、 \dot{V}_e は以下の不等式で表すことができる。

$$\dot{V}_e(t) \leq -\lambda^2 V_e(t) + \beta^2 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \leq -\lambda^2 V_e(t) + \beta^2 \omega_B^2 \quad (3.9)$$

よって、以下を得る。

$$V_e(t) \leq V_e(0) e^{-\lambda^2 t} + \frac{\beta^2 \omega_B^2}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda^2 t}) \rightarrow \frac{\beta^2 \omega_B^2}{\lambda^2} \quad (3.10)$$

これより、誤差ベクトル \mathbf{e} は有界に収まっていることが分かる。 ■

注意 3.1 ($SDRE-Y$) での ε_e は、 $\Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ と \dot{V}_e に許容を与えるように加える。また、(3.10) より、 λ はなるべく大きな正の数、 β はなるべく小さな正の数で加える。ある ε_e , λ , β において $\Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}$ となる $\mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) > \mathbf{0}$ が存在する時、推定誤差の拡張2次形式リアプノフ候補関数 $V_e(t) = \mathbf{e}^T \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{e}$ は、最大外乱 ω_B と、その λ , β において許容される。

注意 3.2 定理 3.1 は以下のように使用する。

- オブザーバ設計

(BFO) のオブザーバゲイン \mathbf{L} を設計する一つの方法は、行列 $\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}_y + \langle \mathbf{M}_u \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{2} \lambda^2 \mathbf{I}$ が $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{r_u}$ の広い範囲で安定行列になるように \mathbf{L} を選ぶことである。

- 有界性チェック

推定誤差の有界性チェックのために、様々な状況下でのシミュレーションを行う。もし ($SDRE-Y$) の解 $\mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}})$ が、それらに対し条件 $\Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}$ を満たした場合、実システムにその (BFO) を使用する。

3.2 双線形外乱分離オブザーバ

この節では、双線形外乱による推定誤差を縮小させる双線形オブザーバを提案する。このオブザーバは [64][65] の相似変換に基づいて設計され、「双線形外乱分離オブザーバ」と呼ぶ事とする。

仮定 3.2 (BLS) に対し、以下を仮定する。

1. すべてのシステムパラメタは既知である。
2. 外乱 ω は有界であり、 $\|\omega\| \leq \omega_B$ となるような正の値 ω_B が存在する。
3. B_ω はフルランク行列であり、 $\text{rank} C_y B_\omega = \text{rank} B_\omega = r_\omega$ である。

□

3.2.1 相似システム

相似変換行列の設計のため、以下の行列を定義する。

定義 3.1 フルランク行列 $V \in \mathbb{R}^{r \times c}$ ($r > c$) に対し、疑似逆行列 $V^+ \in \mathbb{R}^{c \times r}$ と V の零化空間に対する直交基底 $V^\perp \in \mathbb{R}^{(r-c) \times r}$ を定義する。これらの行列は以下の条件を満たす。

1. $V^+ V = I_c \in \mathbb{R}^{c \times c}$
2. $V^\perp V = O \in \mathbb{R}^{(r-c) \times c}$
3. $\begin{bmatrix} V^+ \\ V^\perp \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ は非特異行列である。

□

今、変換行列 T_{B_ω} を次のように定義する。

$$T_{B_\omega} := \begin{bmatrix} B_\omega^+ \\ B_\omega^\perp \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B_\omega^+ \in \mathbb{R}^{r_\omega \times n}, \quad B_\omega^\perp \in \mathbb{R}^{(n-r_\omega) \times n} \quad (3.11)$$

これは以下を満たす。

$$\mathbf{T}_{B_\omega} \mathbf{B}_\omega = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r_\omega} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{B_\omega}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\omega & (\mathbf{B}_\omega^\perp)^+ \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

次に、以下の行列を定義する。

$$\mathbf{C}_y \mathbf{T}_{B_\omega}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_y \mathbf{B}_\omega & \mathbf{C}_y (\mathbf{B}_\omega^\perp)^+ \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

この時、変換行列 \mathbf{T}_y , $\mathbf{T}_{T_{B_\omega}}$, \mathbf{T}_x を以下のように定義出来る。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_y &:= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^+ \\ \mathbf{F}_1^\perp \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \mathbf{T}_{T_{B_\omega}} := \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r_\omega} & \mathbf{F}_1^+ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_{n-r_\omega} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \mathbf{T}_x &:= \mathbf{T}_{T_{B_\omega}} \mathbf{T}_{B_\omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\omega^+ + \mathbf{F}_1^+ \mathbf{F}_2 \mathbf{B}_\omega^\perp \\ \mathbf{B}_\omega^\perp \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

\mathbf{T}_x の逆行列は次のようになっている。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_x^{-1} &= \mathbf{T}_{B_\omega}^{-1} \mathbf{T}_{T_{B_\omega}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\omega & (\mathbf{B}_\omega^\perp)^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r_\omega} & -\mathbf{F}_1^+ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_{n-r_\omega} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\omega & (\mathbf{B}_\omega^\perp)^+ - \mathbf{B}_\omega \mathbf{F}_1^+ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

最後に、以下の相似変換を (BLS) に適用する。

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_x \mathbf{x}, \quad \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{T}_y \mathbf{y} \quad (3.16)$$

(3.16) 式から次の相似システム (SBLS) が導ける。

$$(SBLS) : \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}_\omega(\bar{\mathbf{x}}) \boldsymbol{\omega} + \bar{\mathbf{B}}_u(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{u} \\ \quad = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}} + \left(\bar{\mathbf{B}}_\omega + \{ \bar{\mathbf{M}}_\omega \bar{\mathbf{x}} \} \right) \boldsymbol{\omega} + \left(\bar{\mathbf{B}}_u + \{ \bar{\mathbf{M}}_u \bar{\mathbf{x}} \} \right) \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{C}}_{\bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (3.17)$$

ここで $(SBL S)$ の各要素は

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}^{r_\omega}, \quad \bar{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}^{n-r_\omega} \\
 \bar{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{y}}_1 \in \mathbb{R}^{r_\omega}, \quad \bar{\mathbf{y}}_2 \in \mathbb{R}^{m-r_\omega} \\
 \bar{\mathbf{A}} &:= \mathbf{T}_x \mathbf{A} \mathbf{T}_x^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \\
 \bar{\mathbf{B}}_\omega &:= \mathbf{T}_x \mathbf{B}_\omega = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r_\omega} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_u := \mathbf{T}_x \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{1u} \\ \bar{\mathbf{B}}_{2u} \end{bmatrix} \\
 \bar{\mathbf{M}}_{\omega_i} &:= \mathbf{T}_x \mathbf{M}_{\omega_i} \mathbf{T}_x^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{11\omega_i} & \bar{\mathbf{M}}_{12\omega_i} \\ \bar{\mathbf{M}}_{21\omega_i} & \bar{\mathbf{M}}_{22\omega_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{1\omega_i} \\ \bar{\mathbf{M}}_{2\omega_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2 \dots r_\omega \\
 \bar{\mathbf{M}}_{u_j} &:= \mathbf{T}_x \mathbf{M}_{u_j} \mathbf{T}_x^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{11u_j} & \bar{\mathbf{M}}_{12u_j} \\ \bar{\mathbf{M}}_{21u_j} & \bar{\mathbf{M}}_{22u_j} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2 \dots r_u \\
 \bar{\mathbf{C}}_{\bar{\mathbf{y}}} &:= \mathbf{T}_y \mathbf{C}_y \mathbf{T}_x^{-1} = \mathbf{T}_y \mathbf{C}_y \mathbf{T}_{B_\omega}^{-1} \mathbf{T}_{T_{B_\omega}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^+ \\ \mathbf{F}_1^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r_\omega} & -\mathbf{F}_1^+ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_{n-r_\omega} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r_\omega} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_1^\perp \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r_\omega} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \bar{\mathbf{C}}_{\bar{\mathbf{y}}_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

となっている。

この相似システム $(SBL S)$ は以下の2つのサブシステムにより構成されている。

- サブシステム 1

$$(SBL S-1) : \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = \left(\bar{\mathbf{A}}_{11} + \langle \bar{\mathbf{M}}_{11\omega} \boldsymbol{\omega} \rangle + \langle \bar{\mathbf{M}}_{11u} \mathbf{u} \rangle \right) \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \quad + \left(\bar{\mathbf{A}}_{12} + \langle \bar{\mathbf{M}}_{12\omega} \boldsymbol{\omega} \rangle + \langle \bar{\mathbf{M}}_{12u} \mathbf{u} \rangle \right) \bar{\mathbf{x}}_2 + \bar{\mathbf{B}}_{1u} \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \\ \bar{\mathbf{y}}_1 = \bar{\mathbf{x}}_1 \end{cases} \quad (3.18)$$

• サブシステム 2

$$(SBLCS-2) : \begin{cases} \dot{\bar{x}}_2 = \left(\bar{A}_{21} + \langle \bar{M}_{21\omega} \omega \rangle + \langle \bar{M}_{21u} u \rangle \right) \bar{x}_1 \\ \quad + \left(\bar{A}_{22} + \langle \bar{M}_{22\omega} \omega \rangle + \langle \bar{M}_{22u} u \rangle \right) \bar{x}_2 + \bar{B}_{2u} u \\ \bar{y}_2 = \bar{C}_{\bar{y}_2} \bar{x}_2 \end{cases} \quad (3.19)$$

(SBLCS-1) の状態ベクトル \bar{x}_1 は出力 \bar{y}_1 から直接与える事ができ、 ω の線形項は (SBLCS-2) には現れない。

3.2.2 双線形外乱分離オブザーバの設計

状態量 x , \bar{x}_2 の推定値を \hat{x} , $\hat{\bar{x}}_2$ とした時、(SBLCS-2) に対し以下の双線形外乱分離オブザーバ (BDIO) を設計できる。

$$(BDIO) : \begin{cases} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = T_y y \\ \dot{\hat{\bar{x}}}_2 = \left(\bar{A}_{21} + \langle \bar{M}_{21u} u \rangle \right) \bar{y}_1 + \left(\bar{A}_{22} + \langle \bar{M}_{22u} u \rangle \right) \hat{\bar{x}}_2 \\ \quad + \bar{B}_{2u} u + L(\bar{y}_2 - \bar{C}_{\bar{y}_2} \hat{\bar{x}}_2) \\ \hat{x} = T_x^{-1} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.20)$$

ここで L はオブザーバゲインであり定数行列である。誤差ベクトル $e = x - \hat{x}$, $\bar{e}_2 = \bar{x}_2 - \hat{\bar{x}}_2$ は以下の関係を持っている。

$$e = T_x^{-1}(\bar{x} - \hat{\bar{x}}) = T_x^{-1} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 - \bar{y}_1 \\ \bar{x}_2 - \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = T_x^{-1} \begin{bmatrix} o \\ \bar{e}_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

(3.21) は \bar{x}_2 の推定のみが必要であることを意味している。推定誤差 \bar{e}_2 の時間微分は以下になる。

$$\dot{\bar{e}}_2 = \left(\bar{A}_{22} - L\bar{C}_{\bar{y}_2} + \{ \bar{M}_{22u} u \} \right) \bar{e}_2 + \{ \bar{M}_{2\omega} \bar{x} \} \omega \quad (3.22)$$

(*SBLS-2*) は (*BLS*) から $B_\omega \omega$ の項を分離しているため、このオブザーバはより少ない誤差を期待できる。

次に、このオブザーバの有界収束定理を導く。まず初めに $\Delta Y(u(t), \bar{x}(t), \hat{x}(t))$, $\Delta Y_{sub}(u(t), \hat{x}(t))$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \Delta Y(u, \bar{x}, \hat{x}) &:= \dot{Y}(u, \hat{x}) + \Delta Y_{sub}(u, \hat{x}) \\ &+ \beta^{-2} Y(u, \hat{x}) \left(\{\bar{M}_{2\omega} \bar{x}\} \{\bar{M}_{2\omega} \bar{x}\}^T - \{\bar{M}_{2\omega} \hat{x}\} \{\bar{M}_{2\omega} \hat{x}\}^T \right) Y(u, \hat{x}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta Y_{sub}(u, \hat{x}) &:= Y(u, \hat{x}) \left(\bar{A}_{22} - L \bar{C}_{\bar{y}_2} + \langle \bar{M}_{22u} u \rangle + \frac{1}{2} \lambda^2 I \right) \\ &+ \left(\bar{A}_{22} - L \bar{C}_{\bar{y}_2} + \langle \bar{M}_{22u} u \rangle + \frac{1}{2} \lambda^2 I \right)^T Y(u, \hat{x}) \\ &+ \beta^{-2} Y(u, \hat{x}) \{\bar{M}_{2\omega} \hat{x}\} \{\bar{M}_{2\omega} \hat{x}\}^T Y(u, \hat{x}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

ここで $Y(u(t), \hat{x}(t))$ は次の定理で与えられる正定値対称行列であり、 β, λ は適当な正の数とする。

定理 3.2 (i) $Y(u(t), \hat{x}(t))$ は軌跡 $u(t)$, $\hat{x}(t)$ と正の数 ε_e に対し、以下の SDRE を満たすとする。

$$(SDRE - Y) : \Delta Y_{sub}(u, \hat{x}) = -\varepsilon_e I \quad (3.25)$$

(ii) この $Y(u, \hat{x})$ が以下の不等式を満たすとする。

$$\Delta Y(u, \bar{x}, \hat{x}) < 0 \quad (3.26)$$

この時、誤差ベクトル \bar{e}_2 は有界に収まる。 □

証明 リアプノフ候補関数を以下のような推定誤差の拡張2次形式 V_e で定義する。

$$V_e(t) = \bar{e}_2^T Y(u, \hat{x}) \bar{e}_2 \quad (3.27)$$

V_e の時間微分は以下になる。

$$\begin{aligned}\dot{V}_e(t) &= \bar{\mathbf{e}}_2^T \dot{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \left(\left(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L} \bar{\mathbf{C}}_{\bar{y}_2} + \langle \bar{\mathbf{M}}_{22u} \mathbf{u} \rangle \right) \bar{\mathbf{e}}_2 + \{ \bar{\mathbf{M}}_{2\omega} \bar{\mathbf{x}} \} \boldsymbol{\omega} \right) \\ &\quad + \left(\left(\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L} \bar{\mathbf{C}}_{\bar{y}_2} + \langle \bar{\mathbf{M}}_{22u} \mathbf{u} \rangle \right) \bar{\mathbf{e}}_2 + \{ \bar{\mathbf{M}}_{2\omega} \bar{\mathbf{x}} \} \boldsymbol{\omega} \right)^T \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{e}}_2 \\ &= \bar{\mathbf{e}}_2^T \Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{e}}_2 - \lambda^2 V_e(t) + \beta^2 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 - \beta^{-2} \left\| \beta^2 \boldsymbol{\omega} - \{ \bar{\mathbf{M}}_{2\omega} \bar{\mathbf{x}} \}^T \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{e}}_2 \right\|^2 \quad (3.28)\end{aligned}$$

もし、 $\Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}$ が満足されるとき、 \dot{V}_e は以下の不等式で表すことができる。

$$\dot{V}_e(t) \leq -\lambda^2 V_e(t) + \beta^2 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \leq -\lambda^2 V_e(t) + \beta^2 \omega_B^2 \quad (3.29)$$

よって、以下を得る。

$$V_e(t) \leq V_e(0) \bar{\mathbf{e}}_2^{-\lambda^2 t} + \frac{\beta^2 \omega_B^2}{\lambda^2} (1 - \bar{\mathbf{e}}_2^{-\lambda^2 t}) \rightarrow \frac{\beta^2 \omega_B^2}{\lambda^2} \quad (3.30)$$

これより誤差ベクトル $\bar{\mathbf{e}}_2$ は有界に収まっていることが分かる。 ■

注意 3.3 ($SDRE-Y$) での ε_e は、 $\Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}})$ と \dot{V}_e に許容を与えるように加える。また、(3.30) より、 λ はなるべく大きな正の数、 β はなるべく小さな正の数で加える。ある ε_e , λ , β において $\Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}$ となる $\mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) > \mathbf{0}$ が存在する時、推定誤差の拡張2次形式リアプノフ候補関数 $V_e(t) = \bar{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{e}}_2$ は、最大外乱 ω_B と、その λ , β において許容される。

注意 3.4 定理 3.2 は以下のように使用する。

- オブザーバ設計

($BDIO$) のオブザーバゲイン \mathbf{L} を設計する方法は、行列 $\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L} \bar{\mathbf{C}}_{\bar{y}_2} + \langle \bar{\mathbf{M}}_{22u} \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{2} \lambda^2 \mathbf{I}$ が $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{r_u}$ の広い範囲で安定行列になるように \mathbf{L} を選ぶことである。

- 有界性チェック

推定誤差の有界性チェックのために、様々な状況下でのシミュレーションを行う。もし ($SDRE-Y$) の解 $\mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}})$ が、それらに対し条件 $\Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}$ を満たした場合、実システムにその ($BDIO$) を使用する。

第4章 双線形オブザーバ H_∞ 制御の安定性

この章では2章の双線形 H_∞ 状態フィードバック制御と、3章の双線形オブザーバの併用を考える。

4.1 定式化

2章で最初に定義された以下の双線形系一般化プラント

$$(GBLS) : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}_u(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_z\mathbf{x} + \mathbf{D}_u\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_y\mathbf{x} \end{cases}$$

これに対する双線形オブザーバ H_∞ 制御則を考える。まず定義2.1に追加の定義を加え、状態フィードバック制御則と同様の直交条件を仮定する。

定義 4.1 ベクトル \mathbf{v} に対し、以下のノルムを定義する。

$\|\mathbf{v}\|_Q$ は重み付きノルム $\sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{Q} \mathbf{v}}$ であり、 \mathbf{Q} は正定値対称行列である。 □

仮定 4.1 $(GBLS)$ に対し以下の直交条件が満たされているとする。

$$\mathbf{D}_u^T [\mathbf{C}_z \ \mathbf{D}_u] = [\mathbf{O} \ \mathbf{I}] \quad (4.1)$$

□

仮定4.1の(4.1)より、以下の式が導ける。

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z \mathbf{x} + \|\mathbf{u}\|^2 \quad (4.2)$$

次に、 $\Delta \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}(t))$, $\Delta \mathbf{X}_{sub}(\hat{\mathbf{x}}(t))$ を以下のように定義する。

$$\Delta \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) := \dot{\mathbf{X}}(\hat{\mathbf{x}}) + \Delta \mathbf{X}_{sub}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{X}_{sub}(\hat{\mathbf{x}}) := & \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \left(\mathbf{A} + \frac{1}{2}(\mu_u^2 + \mu_\omega^2) \mathbf{I} \right) + \left(\mathbf{A} + \frac{1}{2}(\mu_u^2 + \mu_\omega^2) \mathbf{I} \right)^T \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \\ & - \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \left(\mathbf{B}_u(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{B}_u^T(\hat{\mathbf{x}}) - \alpha^{-2} \mathbf{B}_\omega(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{B}_\omega^T(\hat{\mathbf{x}}) \right) \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここで、 $\mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}(t))$ は次の定理で与えられる正定値対称行列であり、 $\alpha, \mu_u, \mu_\omega$ は適当な正の数であるとする。

4.2 双線形全次元オブザーバ H_∞ 制御則

この節では (GBLS) に対し、双線形全次元オブザーバ (BFO) を使用した双線形 H_∞ 制御則を導く。以下の定理における $\Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$, $\Delta \mathbf{Y}_{sub}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}})$ は (3.3)(3.4) で定義されたものである。

定理 4.1 (i) $\mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}(t))$ はある正の数 ε_x と任意の $\hat{\mathbf{x}} (\neq \mathbf{o})$ に対し以下の SDRE を満たすとする。

$$(\text{SDRE}-\mathbf{X}) : \Delta \mathbf{X}_{sub}(\hat{\mathbf{x}}) = -\varepsilon_x \mathbf{I} \quad (4.5)$$

(ii) $\mathbf{Y}(\mathbf{u}(t), \hat{\mathbf{x}}(t))$ は軌跡 $\mathbf{u}(t)$, $\hat{\mathbf{x}}(t)$ と正の数 ε_e に対し、以下の SDRE を満たすとする。

$$(\text{SDRE}-\mathbf{Y}) : \Delta \mathbf{Y}_{sub}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) = -\varepsilon_e \mathbf{I} \quad (4.6)$$

(iii) これらの $\mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}})$, $\mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}})$ が以下の不等式を満たすとする。

$$\begin{aligned} \Delta U(t) := & \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{x} + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \left(\Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) + \mu_u^{-2} \langle \mathbf{M}_u \mathbf{u} \rangle^T \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \langle \mathbf{M}_u \mathbf{u} \rangle \right. \\ & \left. + \mu_\omega^{-2} \langle \mathbf{M}_\omega \boldsymbol{\omega} \rangle^T \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \langle \mathbf{M}_\omega \boldsymbol{\omega} \rangle + \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{B}_u(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{B}_u^T(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \right) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) < 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

この時、以下のコントローラ

$$(\mathcal{BFO} - \mathcal{C}) : \begin{cases} (\mathcal{BFO}) : \dot{\hat{x}} = (A + \langle M_u u \rangle) \hat{x} + B_u u + L(y - C_y \hat{x}) \\ u = -B_u^T(\hat{x}) X(\hat{x}) \hat{x} \end{cases} \quad (4.8)$$

は $(\mathcal{GBLS}, \mathcal{BFO})$ の内部安定性を保証し、 $x(0) = o$, $\hat{x}(0) = o$ のとき十分小さな $\rho > 0$ において以下の H_∞ ノルム不等式条件を満足する。

$$\|z\|_2 < \gamma \|\omega\|_2, \quad \omega \in \mathcal{L}_{2\rho} \ (\omega \neq o) \quad (4.9)$$

ここで、 $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ である。 □

証明 初めに、以下のような状態量の拡張2次形式 V_x を考える。

$$V_x(t) = x^T X(\hat{x}) x \quad (4.10)$$

(\mathcal{GBLS}) のシステム方程式は $e = x - \hat{x}$ により、以下のように書き換える事が出来る。

$$\dot{x} = Ax + B_\omega(\hat{x})\omega + B_u(\hat{x})u + \langle M_\omega \omega \rangle e + \langle M_u u \rangle e \quad (4.11)$$

(4.2) を使い $u = -B_u^T(\hat{x}) X(\hat{x}) \hat{x}$ に注意すると、 V_x の時間微分は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{V}_x(t) &= x^T \Delta X(\hat{x}) x - \|z\|^2 + e^T X(\hat{x}) B_u(\hat{x}) B_u^T(\hat{x}) X(\hat{x}) e \\ &\quad + \alpha^2 \|\omega\|^2 - \alpha^2 \left\| \omega - \alpha^{-2} B_\omega^T(\hat{x}) X(\hat{x}) x \right\|^2 \\ &\quad - \mu_u^2 \left\| x - \mu_u^{-2} \langle M_u u \rangle e \right\|_{X(\hat{x})}^2 + \mu_u^{-2} \left\| \langle M_u u \rangle e \right\|_{X(\hat{x})}^2 \\ &\quad - \mu_\omega^2 \left\| x - \mu_\omega^{-2} \langle M_\omega \omega \rangle e \right\|_{X(\hat{x})}^2 + \mu_\omega^{-2} \left\| \langle M_\omega \omega \rangle e \right\|_{X(\hat{x})}^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

ここで、拡張2次形式リアプノフ関数 V を、(4.10) に (3.7) を加えた以下の式で定義する。

$$V(t) = V_x(t) + V_e(t) \quad (4.13)$$

(4.7) を使い、(4.12) と (3.8) を組み合わせると、 V の時間微分は以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= \dot{V}_x(t) + \dot{V}_e(t) \\
 &= \Delta U(t) - \|z\|^2 + (\alpha^2 + \beta^2)\|\omega\|^2 \\
 &\quad - \alpha^2 \left\| \omega - \alpha^{-2} B_\omega^T(\hat{x}) X(\hat{x}) x \right\|^2 - \beta^{-2} \left\| \beta^2 \omega - B_\omega(x)^T Y(u, \hat{x}) e \right\|^2 \\
 &\quad - \mu_u^2 \left\| x - \mu_u^{-2} \langle M_u u \rangle e \right\|_{X(\hat{x})}^2 - \mu_\omega^2 \left\| x - \mu_\omega^{-2} \langle M_\omega \omega \rangle e \right\|_{X(\hat{x})}^2 - \lambda^2 \|e\|_{Y(u, \hat{x})}^2 \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

◆ 内部安定性

ここで内部安定性を示す。 $\omega \equiv o$ かつ $\Delta U(t) < 0$ とき、(4.14) から以下の不等式を導ける。

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= \Delta U(t) - \|z\|^2 - \alpha^{-2} \left\| B_\omega^T(x) X(\hat{x}) x \right\|^2 - \beta^{-2} \left\| B_\omega^T(x) Y(u, \hat{x}) e \right\|^2 \\
 &\quad - \mu_u^2 \left\| x - \mu_u^{-2} \langle M_u u \rangle e \right\|_{X(\hat{x})}^2 - \mu_\omega^2 \|x\|_{X(\hat{x})}^2 - \lambda^2 \|e\|_{Y(u, \hat{x})}^2 < 0 \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

V は下に有界であるので

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0 \quad (4.16)$$

となる。よって (4.15) の各項は $t \rightarrow \infty$ で 0 となる。これは以下を意味する。

$$\|x\|_{X(x)}^2 + \|e\|_{Y(u, \hat{x})}^2 \rightarrow 0, \quad \Rightarrow \quad x \rightarrow o, \hat{x} \rightarrow o \quad (4.17)$$

これより (GBLS, BFO) は内部安定である。

◆ ロバスト性

次に、 H_∞ ノルム不等式条件 (4.9) を示す。 $\omega \neq o$ かつ $\Delta U(t) < 0$ とき、(4.14) は以下のように簡略化できる。

$$\dot{V} < -\|z\|^2 + \gamma^2 \|\omega\|^2, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (4.18)$$

$x(0) = o, \hat{x}(0) = o$ かつ $\omega \in \mathcal{L}_{2\rho}$ とき、十分小さな ρ に対して (4.15) より $x(t)$ と $\hat{x}(t)$ は原点近傍に留まる。 $\omega \in \mathcal{L}_{2\rho}$ は $\omega \rightarrow o$ を意味するため、付録 A 定理 A.1 より $t \rightarrow \infty$ とき $x \rightarrow o, \hat{x} \rightarrow o$ と

なる。このとき (4.18) の両辺を $t = [0, \infty)$ で積分すると

$$0 = V(\infty) - V(0) < -\|z\|_2^2 + \gamma^2 \|\omega\|_2^2 \quad (4.19)$$

となる。これより、以下の条件式 (4.9) を証明できる。

$$\|z\|_2 < \gamma \|\omega\|_2 \quad (4.20)$$

■

注意 4.1 定理 4.1 は以下のように使用する。

- コントローラ設計

$(SDRE-X)$ をオンラインで解き、その時の解 $X(\hat{x})$ を $(BFO-C)$ に使用する。

- 安定性チェック

閉ループ安定性のチェックのために、様々な状況下でのシミュレーションを行う。もし $(SDRE-X)$, $(SDRE-Y)$ の解 $X(\hat{x})$, $Y(u, \hat{x})$ が、それらに対し条件 $\Delta U < 0$ を満たした場合、実システムにその $(BFO-C)$ を使用する。

4.3 双線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御則

この節では $(GBLS)$ に対し、双線形外乱分離オブザーバ $(BDIO)$ を使用した双線形 H_∞ 制御則を導く。以下の定理における $\Delta Y(u, \bar{x}, \hat{x})$, $\Delta Y_{sub}(u, \hat{x})$ は (3.23)(3.24) で定義されたものである。

定理 4.2 (i) $X(\hat{x}(t))$ はある正の数 ε_x と任意の $\hat{x} (\neq o)$ に対し、以下の SDRE を満たすとする。

$$(SDRE-X) : \Delta X_{sub}(\hat{x}) = -\varepsilon_x I \quad (4.21)$$

(ii) $Y(u(t), \hat{x}(t))$ は軌跡 $u(t)$, $\hat{x}(t)$ と正の数 ε_e に対し、以下の SDRE を満たすとする。

$$(SDRE-Y) : \Delta Y_{sub}(u, \hat{x}) = -\varepsilon_e I \quad (4.22)$$

(iii) これらの $\mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}})$, $\mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}})$ が以下の不等式を満たすとする。

$$\begin{aligned} \Delta U(t) &:= \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{x} + (\bar{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_2)^T \Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}) (\bar{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_2) \\ &\quad + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \left(\mu_u^{-2} \langle \mathbf{M}_u \mathbf{u} \rangle^T \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \langle \mathbf{M}_u \mathbf{u} \rangle + \mu_\omega^{-2} \langle \mathbf{M}_\omega \boldsymbol{\omega} \rangle^T \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \langle \mathbf{M}_\omega \boldsymbol{\omega} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{B}_u(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{B}_u^T(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \right) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) < 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

この時、以下のコントローラ

$$(\mathcal{BDIO} - \mathcal{C}) : \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{BDIO}) : \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_y \mathbf{y} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 = \left(\bar{\mathbf{A}}_{21} + \langle \bar{\mathbf{M}}_{21u} \mathbf{u} \rangle \right) \bar{\mathbf{y}}_1 + \left(\bar{\mathbf{A}}_{22} + \langle \bar{\mathbf{M}}_{22u} \mathbf{u} \rangle \right) \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \quad + \bar{\mathbf{B}}_{2u} \mathbf{u} + \mathbf{L}(\bar{\mathbf{y}}_2 - \bar{\mathbf{C}}_{\bar{\mathbf{y}}_2} \hat{\mathbf{x}}_2), \\ \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_x^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} = -\mathbf{B}_u^T(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

は $(\mathcal{GBLS}, \mathcal{BDIO})$ の内部安定性を保証し、 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{o}$, $\hat{\mathbf{x}}_2(0) = \mathbf{o}$ のとき十分小さな $\rho > 0$ において以下の H_∞ ノルム不等式条件を満足する。

$$\|\mathbf{z}\|_2 < \gamma \|\boldsymbol{\omega}\|_2, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{L}_{2\rho} \ (\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{o}) \quad (4.25)$$

ここで、 $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ である。 □

証明 拡張2次形式リアプノフ関数 V を (4.10) に (3.27) を加えた以下の式で定義する。

$$V(t) = V_x(t) + V_e(t) \quad (4.26)$$

(4.23) を使い、(4.12) と (3.28) を組み合わせると、 V の時間微分は以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= \dot{V}_x(t) + \dot{V}_e(t) \\
 &= \Delta U(t) - \|z\|^2 + (\alpha^2 + \beta^2)\|\omega\|^2 \\
 &\quad - \alpha^2 \left\| \omega - \alpha^{-2} B_\omega^T(\hat{x}) X(\hat{x}) x \right\|^2 - \beta^{-2} \left\| \beta^2 \omega - \{\bar{M}_{2\omega} \bar{x}\}^T Y(u, \hat{x}) \bar{e}_2 \right\|^2 \\
 &\quad - \mu_u^2 \left\| x - \mu_u^{-2} \langle M_u u \rangle e \right\|_{X(\hat{x})}^2 - \mu_\omega^2 \left\| x - \mu_\omega^{-2} \langle M_\omega \omega \rangle e \right\|_{X(\hat{x})}^2 - \lambda^2 \|\bar{e}_2\|_{Y(u, \hat{x})}^2 \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

◆ 内部安定性

ここで内部安定性を示す。 $\omega \equiv \mathbf{o}$ かつ $\Delta U(t) < 0$ とき、(4.27) から以下の不等式を導ける。

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= \Delta U(t) - \|z\|^2 - \alpha^{-2} \left\| B_\omega^T(x) X(\hat{x}) x \right\|^2 - \beta^{-2} \left\| \{\bar{M}_{2\omega} \bar{x}\}^T Y(u, \hat{x}) \bar{e}_2 \right\|^2 \\
 &\quad - \mu_u^2 \left\| x - \mu_u^{-2} \langle M_u u \rangle e \right\|_{X(\hat{x})}^2 - \mu_\omega^2 \|x\|_{X(\hat{x})}^2 - \lambda^2 \|\bar{e}_2\|_{Y(u, \hat{x})}^2 < 0 \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

V は下に有界であるので、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0 \quad (4.29)$$

となる。よって (4.28) の各項は $t \rightarrow \infty$ で 0 となる。これは以下を意味する。

$$\|x\|_{X(x)}^2 + \|\bar{e}_2\|_{Y(u, \hat{x})}^2 \rightarrow 0, \quad \Rightarrow \quad x \rightarrow \mathbf{o}, \quad \hat{x}_2 \rightarrow \mathbf{o} \quad (4.30)$$

これより (GBLS, BDIO) は内部安定である。

◆ ロバスト性

次に、 H_∞ ノルム不等式条件 (4.25) を示す。 $\omega \neq \mathbf{o}$ かつ $\Delta U(t) < 0$ とき、(4.27) は以下のように簡略化できる。

$$\dot{V} < -\|z\|^2 + \gamma^2 \|\omega\|^2, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (4.31)$$

$x(0) = \mathbf{o}$, $\hat{x}_2(0) = \mathbf{o}$ かつ $\omega \in \mathcal{L}_{2\rho}$ とき、十分小さな ρ に対して (4.28) より $x(t)$ と $\hat{x}_2(t)$ は原点近傍に留まる。 $\omega \in \mathcal{L}_{2\rho}$ は $\omega \rightarrow \mathbf{o}$ を意味するため、付録 A 定理 A.1 より $t \rightarrow \infty$ とき $x \rightarrow \mathbf{o}$, $\hat{x}_2 \rightarrow \mathbf{o}$

となる。このとき (4.31) の両辺を $t = [0, \infty)$ で積分すると

$$0 = V(\infty) - V(0) < -\|z\|_2^2 + \gamma^2 \|\omega\|_2^2 \quad (4.32)$$

となる。これより、以下の条件式 (4.25) を証明できる。

$$\|z\|_2 < \gamma \|\omega\|_2 \quad (4.33)$$

■

注意 4.2 定理 4.2 は以下のように使用する。

- コントローラ設計

$(SDRE-X)$ をオンラインで解き、その時の解 $X(\hat{x})$ を $(BDIO-C)$ に使用する。

- 安定性チェック

閉ループ安定性のチェックのために、様々な状況下でのシミュレーションを行う。もし $(SDRE-X)$, $(SDRE-Y)$ の解 $X(\hat{x})$, $Y(u, \hat{x})$ が、それらに対し条件 $\Delta U < 0$ を満たした場合、実システムにその $(BDIO-C)$ を使用する。

第5章 熱交換器への適用

この章では双線形モデルとして近似できる分布系熱交換器に対し、2章の双線形 H_∞ 出力制御則と4章の双線形オブザーバ H_∞ 制御則に基づき、一般化プラントの設計を行う。

5.1 双線形系熱交換器モデル

流量を操作量とする熱交換器は広く普及している。そのような熱交換器に対し、未知の外乱流量が混入したとする。この時の制御は「未知外乱流量下での入力流量による熱交換器の分布温度制御」となる。簡単化のため、分布系熱交換器システムは重み付き残差法 (method of weighted residuals: MWR) により集中系モデル近似される [21][22][31][32][66][67][68][69]。この時、以下の3つの点に注意しなければならない。

- (a) 動的システムは入力と状態量だけでなく、外乱と状態量の積の項を持つ。
- (b) 状態ベクトルは物理量を持たない「一般化フーリエ係数」となるため、それらを直接観測することはできない。
- (c) 熱交換器の構造上の理由から、入口・出口もしくは幾つかのポイントでしか温度を計測する事が出来ない。よって、内部分布温度を知るためには適切な推定器に頼らなければならない。

特徴 (a) に対し、従来、外乱流量は双線形外乱項が無視できるくらい小さいという仮定の下で双線形項を切り捨てた線形化が行われてきた。しかし、大きな外乱に対して良い性能を得るためにも特徴 (a) は陽に考慮すべき点である。この場合、特徴 (b),(c) は結果的に特徴 (a) に対応した正確な双線形オブザーバを要求する。つまり、この熱交換器システムにおいて、未知外乱流量による温度変化抑制に H_∞ 制御を考えた場合、双線形 H_∞ 制御性能と双線形オブザーバ性能の両方が問われることになる。

5.2 熱交換器のモデリング

初めに、Fig.5.1 で表されるような薄膜 (熱交換面) で仕切られた分布系並流型熱交換器に対し、重み付き残差法 (method of weighted residuals: MWR) を使用すると以下のような定常状態周りの方程式が導ける (付録 B を参照)。

$$(\mathcal{HEX}) : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\eta}(t) + (\mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}\omega} + \mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}\omega} \boldsymbol{\eta}(t)) \omega(t) + (\mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}u} + \mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}u} \boldsymbol{\eta}(t)) u(t), \\ \Delta \boldsymbol{\theta}(t, \mathbf{l}) = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{l}) \boldsymbol{\eta}(t), \end{cases} \quad (5.1)$$

ここで、 $\omega, u \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{2N}$, $\Delta \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$ であり、各要素は以下のようにになっている。

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1(t) \\ \boldsymbol{\eta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\eta_{11}(t) \ \eta_{12}(t) \ \dots \ \eta_{1N}(t)]^T \\ [\eta_{21}(t) \ \eta_{22}(t) \ \dots \ \eta_{2N}(t)]^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta \boldsymbol{\theta}(t, \mathbf{l}) = \begin{bmatrix} \Delta \theta_1(t, l_1) \\ \Delta \theta_2(t, l_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{l}) = \begin{bmatrix} l_1 & l_1^2 & \dots & l_1^N & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & l_2 & l_2^2 & \dots & l_2^N \end{bmatrix}$$

(\mathcal{HEX}) において、状態ベクトル η_{ij} [d.l.(dimensionless)] は一般化フーリエ係数、 N は MWR の近似展開次数、 ω [d.l.] と u [d.l.] は第 1・第 2 流量であり $\omega, u > -1$ となっている。 $\Delta \theta_1$ [°C], $\Delta \theta_2$ [°C] は第 1・第 2 流体の定常温度偏差、 l_1 [d.l.], l_2 [d.l.] は入口から観測点までの無次元化固定距離であり、 $0 \leq l_{1,2} \leq 1$ となっている。 t [d.l.] は無次元化時間である。

このシステムにおける狙いは、未知外乱流量 ω の下で入力流量 u を使い、任意の評価ポイント \mathbf{l}

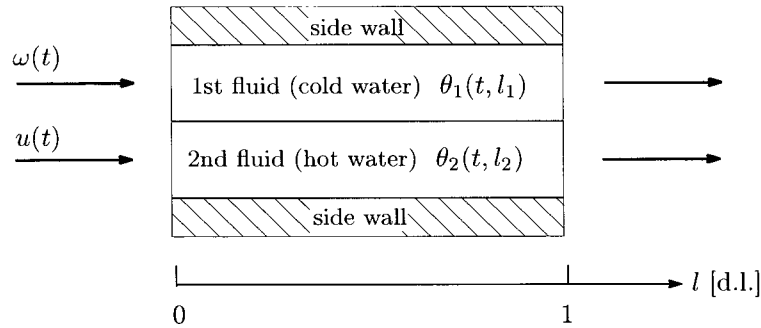


Fig. 5.1: Parallel flow heat exchanger

において $\Delta\theta_1(t, l_1) = 0$ または $\Delta\theta_2(t, l_2) = 0$ (もしくはその両方) を保つ事とする。システムは入力だけでなく、未知外乱に対しても双線形となっている事に注意する。

5.3 双線形オブザーバ H_∞ 制御則に対する一般化プラントの設計

Fig.5.2 はシステム ($\mathcal{H}\mathcal{E}\mathcal{X}$) に対する H_∞ 制御一般化プラントを表している。評価出力 z_1 は評価ポイント $l_z = [l_{1z} \ l_{2z}]^T$ における温度ベクトル $\Delta\theta(t, l_z)$ を評価するために定義され、計測出力ベクトル y は計測ポイント $l_y = [l_{1y} \ l_{2y}]^T$ における温度ベクトル $\Delta\theta(t, l_y)$ に等しい。望みの周波数帯で z/ω のゲインを効果的に抑えるため、重み周波数関数 $W(s)$ を z_1 の前に取り付ける。重み周波数を Fig.5.3 に表す。

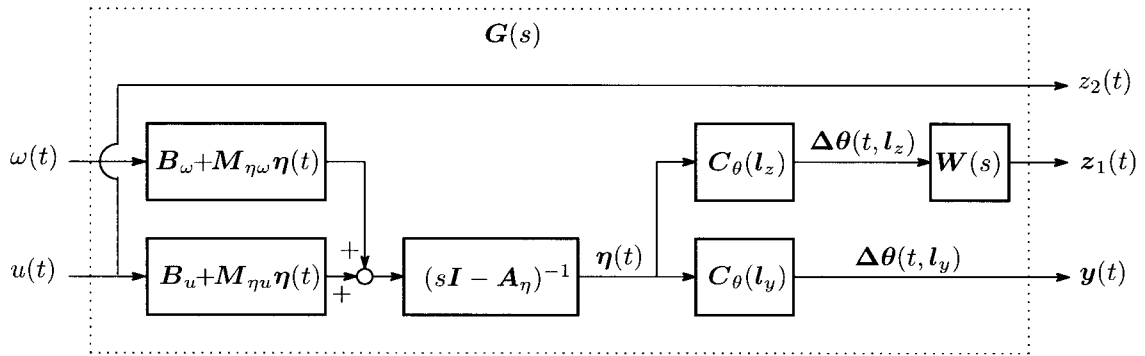


Fig. 5.2: Generalized plant $G(s)$ (observer control)

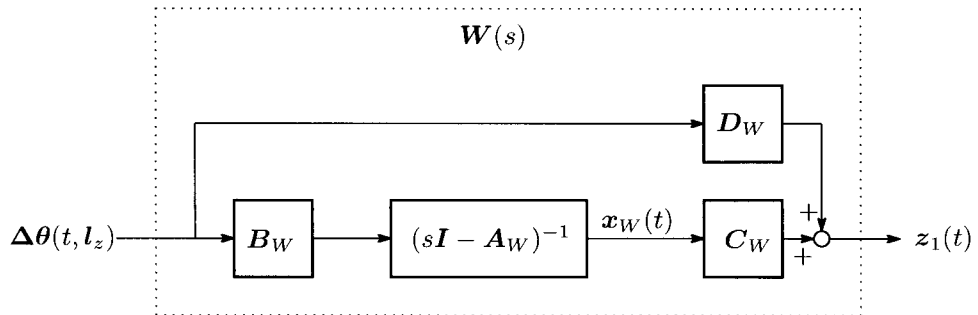


Fig. 5.3: Frequency weight $W(s)$

周波数領域において以下が言える。

$$\mathbf{z}_1(t) = \mathbf{W}(s) \cdot \Delta\boldsymbol{\theta}(t, \mathbf{l}_z) = \mathbf{W}(s) \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta_1(t, l_{1z}) \\ \Delta\theta_2(t, l_{2z}) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

ここで $\mathbf{z}_1 \in \mathbb{R}^2$ であり、また、

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\theta_1}(s) & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_{\theta_2}(s) \end{bmatrix} := \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_W & \mathbf{B}_W \\ \hline \mathbf{C}_W & \mathbf{D}_W \end{array} \right] \quad (5.3)$$

と定義すると、重み状態量を \mathbf{x}_W として以下の状態方程式が導ける。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_W(t) = \mathbf{A}_W \mathbf{x}_W(t) + \mathbf{B}_W \Delta\boldsymbol{\theta}(t, \mathbf{l}_z) = \mathbf{A}_W \mathbf{x}_W(t) + \mathbf{B}_W \mathbf{C}_\theta(\mathbf{l}_z) \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{z}_1(t) = \mathbf{C}_W \mathbf{x}_W(t) + \mathbf{D}_W \Delta\boldsymbol{\theta}(t, \mathbf{l}_z) = \mathbf{C}_W \mathbf{x}_W(t) + \mathbf{D}_W \mathbf{C}_\theta(\mathbf{l}_z) \boldsymbol{\eta} \end{cases} \quad (5.4)$$

仮定 4.1 の直交条件 (4.1) を満たすために、評価出力 z_2 が以下のように定義される。

$$z_2(t) = u(t) \quad (5.5)$$

($\mathcal{H}\mathcal{E}\mathcal{X}$), (5.4), (5.5) は一般化プラント ($\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{E}\mathcal{X}$) に以下のように要約される。

$$(\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{E}\mathcal{X}) : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_\omega(\mathbf{x})\omega + \mathbf{B}_u(\mathbf{x})u \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_z\mathbf{x} + \mathbf{D}_u u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_y\mathbf{x} \end{cases} \quad (5.6)$$

各要素は以下のようにになっている。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}(t) \\ \mathbf{x}_W(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\eta & \mathbf{O} \\ \mathbf{B}_W \mathbf{C}_\theta(\mathbf{l}_z) & \mathbf{A}_W \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_\omega(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\eta\omega} \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\eta\omega} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$B_u(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} B_{\eta u} \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{\eta u} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad D_u = \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_z = \begin{bmatrix} D_W C_\theta(l_z) & C_W \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} C_\theta(l_y) & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

ここで、仮定 4.1 の直交条件 (4.1) は満たされている事が分かる。

注意 5.1 評価温度 $\Delta\theta(t, l_z)$ は、熱交換器内部温度であったとしても、評価のため実測されると考えるのが普通である。これは、(5.4) より、重み状態量 \mathbf{x}_W は常に真値が分かり推定する必要が無い事を示している。また、(5.4) において \mathbf{x}_W は安定である。

注意 5.2 3章での議論は、3章の \mathbf{x} を5章の $\boldsymbol{\eta}$ にそのまま置き換え、(BLS) を (\mathcal{HEX}) として考える事が出来る。

注意 5.3 4章での議論は、(GBLS) を (\mathcal{GHEX}) として考えることが出来る。しかし、(\mathcal{GHEX}) の状態量 \mathbf{x} は (\mathcal{HEX}) の状態量 $\boldsymbol{\eta}$ と重み状態量 \mathbf{x}_W で構成されているため、注意 5.1 と注意 5.2 より、推定値と推定誤差の記号に注意する必要がある。(\mathcal{HEX}) が多入力 \mathbf{u} 、多外乱 $\boldsymbol{\omega}$ のシステムであったと仮定すると、定理 4.1・定理 4.2 は以下のように修正できる。

系 5.1 (定理 4.1 の系) (i) $\mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}(t))$ はある正の数 ε_x と任意の $\hat{\mathbf{x}} (\neq \mathbf{o})$ に対し以下の SDRE を満たすとする。

$$(\text{SDRE}-\mathbf{X}) : \Delta \mathbf{X}_{sub}(\hat{\mathbf{x}}) = -\varepsilon_x \mathbf{I} \quad (5.7)$$

(ii) $\mathbf{Y}(\mathbf{u}(t), \hat{\boldsymbol{\eta}}(t))$ は軌跡 $\mathbf{u}(t)$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}(t)$ と正の数 ε_e に対し、以下の SDRE を満たすとする。

$$(\text{SDRE}-\mathbf{Y}) : \Delta \mathbf{Y}_{sub}(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = -\varepsilon_e \mathbf{I} \quad (5.8)$$

(iii) これらの $\mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}})$, $\mathbf{Y}(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ が以下の不等式を満たすとする。

$$\begin{aligned} \Delta U(t) := & \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{x} + (\boldsymbol{\eta} - \hat{\boldsymbol{\eta}})^T \Delta \mathbf{Y}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) (\boldsymbol{\eta} - \hat{\boldsymbol{\eta}}) + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \left(\mu_u^{-2} \langle \mathbf{M}_u \mathbf{u} \rangle^T \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \langle \mathbf{M}_u \mathbf{u} \rangle \right. \\ & \left. + \mu_\omega^{-2} \langle \mathbf{M}_\omega \boldsymbol{\omega} \rangle^T \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \langle \mathbf{M}_\omega \boldsymbol{\omega} \rangle + \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{B}_u(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{B}_u^T(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}) \right) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) < 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

この時、以下のコントローラ

$$(\mathcal{BFO} - \mathcal{C}) : \begin{cases} (\mathcal{BFO}) : \begin{cases} \dot{\hat{\eta}} = (A_\eta + \langle M_{\eta u} u \rangle) \hat{\eta} + B_{\eta u} u + L(\Delta \theta(t, l_y) - C_\theta(l_y) \hat{\eta}) \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{\eta} \\ x_W \end{bmatrix} \end{cases} \\ u = -B_u^T(\hat{x}) X(\hat{x}) \hat{x} \end{cases} \quad (5.10)$$

は $(\mathcal{GHEN}, \mathcal{BFO})$ の内部安定性を保証し、 $x(0) = o$, $\hat{\eta}(0) = o$ のとき十分小さな $\rho > 0$ において以下の H_∞ ノルム不等式条件を満足する。

$$\|z\|_2 < \gamma \|\omega\|_2, \quad \omega \in \mathcal{L}_{2\rho} (\omega \neq o) \quad (5.11)$$

ここで、 $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ である。 □

系 5.2 (定理 4.2 の系) (i) $X(\hat{x}(t))$ はある正の数 ε_x と任意の $\hat{x} (\neq o)$ に対し、以下の SDRE を満たすとする。

$$(\mathcal{SDRE} - X) : \Delta X_{sub}(\hat{x}) = -\varepsilon_x I \quad (5.12)$$

(ii) $Y(u(t), \hat{\eta}(t))$ は軌跡 $u(t)$, $\hat{\eta}(t)$ と正の数 ε_e に対し、以下の SDRE を満たすとする。

$$(\mathcal{SDRE} - Y) : \Delta Y_{sub}(u, \hat{\eta}) = -\varepsilon_e I \quad (5.13)$$

(iii) これらの $X(\hat{x})$, $Y(u, \hat{\eta})$ が以下の不等式を満たすとする。

$$\begin{aligned} \Delta U(t) &:= x^T \Delta X(\hat{x}) x + (\bar{\eta}_2 - \hat{\eta}_2)^T \Delta Y(u, \bar{\eta}, \hat{\eta}) (\bar{\eta}_2 - \hat{\eta}_2) \\ &\quad + (x - \hat{x})^T \left(\mu_u^{-2} \langle M_u u \rangle^T X(\hat{x}) \langle M_u u \rangle + \mu_\omega^{-2} \langle M_\omega \omega \rangle^T X(\hat{x}) \langle M_\omega \omega \rangle \right. \\ &\quad \left. + X(\hat{x}) B_u(\hat{x}) B_u^T(\hat{x}) X(\hat{x}) \right) (x - \hat{x}) < 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

この時、 $\Delta\theta(t, l_y) = \Delta\theta_y(t)$ とした以下のコントローラ

$$(BDIO - C) : \left\{ \begin{array}{l} (BDIO) : \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \bar{\Delta\theta}_{1y} \\ \bar{\Delta\theta}_{2y} \end{bmatrix} = T_\theta \Delta\theta_y \\ \dot{\hat{\eta}}_2 = \left(\bar{A}_{21\eta} + \langle \bar{M}_{21\eta u} u \rangle \right) \bar{\Delta\theta}_{1y} + \left(\bar{A}_{22\eta} + \langle \bar{M}_{22\eta u} u \rangle \right) \hat{\eta}_2 \\ \quad + \bar{B}_{2\eta u} u + L(\bar{\Delta\theta}_{2y} - \bar{C}_{\theta_2} \hat{\eta}_2) \\ \hat{\eta} = T_\eta^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\Delta\theta}_{1y} \\ \hat{\eta}_2 \end{bmatrix} \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{\eta} \\ x_W \end{bmatrix} \end{array} \right. \\ u = -B_u^T(\hat{x})X(\hat{x})\hat{x} \end{array} \right. \quad (5.15)$$

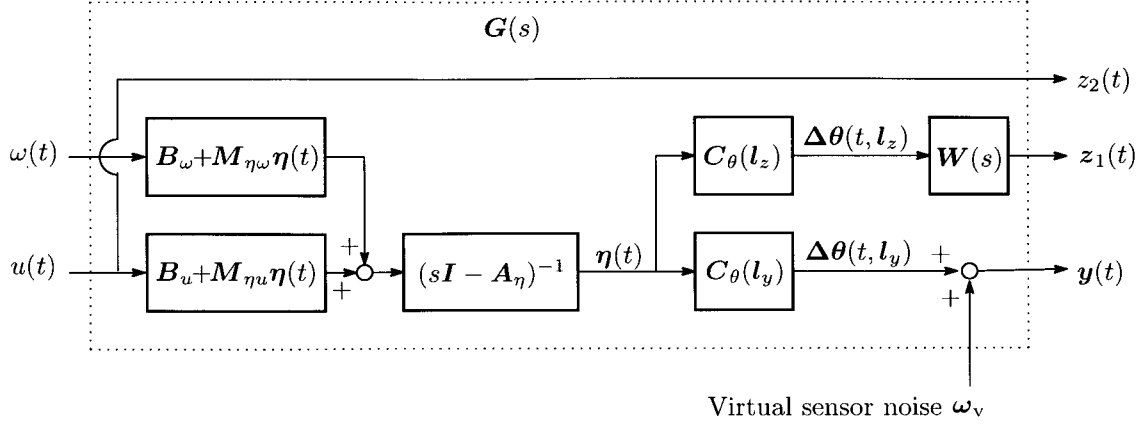
は $(\mathcal{GHX}, BDIO)$ の内部安定性を保証し、 $x(0) = o, \hat{\eta}_2(0) = o$ のとき十分小さな $\rho > 0$ において以下の H_∞ ノルム不等式条件を満足する。

$$\|z\|_2 < \gamma \|\omega\|_2, \quad \omega \in \mathcal{L}_{2\rho} (\omega \neq o) \quad (5.16)$$

ここで、 $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ である。 □

5.4 双線形 H_∞ 出力フィードバック制御則に対する一般化プラントの設計

H_∞ 出力フィードバック制御則において、仮定 2.2 の直交条件 (2.31) を満たすために、仮想センサノイズ $\omega_v \in \mathbb{R}^2$ を導入する (Fig.5.4)。出力 y は、距離 l_y において計測された温度 $\Delta\theta(t, l_y)$ に、セン

Fig. 5.4: Generalized plant $G(s)$ (output control)

サノイズ ω_v が加わったものとなる。

$$(\mathcal{GH}\mathcal{E}\mathcal{X}) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_\omega(x)\omega + B_u(x)u \\ z = C_zx + D_uu \\ y = C_yx + D_\omega\omega \end{cases} \quad (5.17)$$

ここで、

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \omega_v \end{bmatrix}, \quad B_\omega(x) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{\eta\omega} \\ o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{\eta\omega} & O \\ O & O \end{bmatrix} x, & O \end{bmatrix}, \quad D_\omega = \begin{bmatrix} o & I \end{bmatrix}$$

となる。これら以外の行列・ベクトル要素は双線形オブザーバ H_∞ 制御則に対する一般化プラント $(\mathcal{GH}\mathcal{E}\mathcal{X})$ と同じになる。また、仮定 2.2.2 の直交条件 (2.30)(2.31) は常に満たされている事が分かる。

注意 5.4 シミュレーションでは仮想センサノイズ ω_v には o が代入される。実機実装における ω_v には、実際のセンサノイズやモデル化誤差による外乱が加わる。

注意 5.5 $(\mathcal{GH}\mathcal{E}\mathcal{X})$ の状態量 x は $(\mathcal{H}\mathcal{E}\mathcal{X})$ の状態量 η と重み状態量 x_W で構成されており、注意 5.1 より、重み状態量 x_W は推定する必要が無い事が分かる。しかし、2章で提案した $(\mathcal{B}\mathcal{H}\mathcal{O})$ は状態量 x を全て推定する機構になっているため、重み状態量 x_W も推定している事が分かる。そのため、重み状態量 x_W にも推定誤差が生じる事に注意する。

第6章 シミュレーションと実験

この章では提案した3制御器: 双線形 H_∞ 出力制御器 ($BHO-C$)・双線形全次元オブザーバ制御器 ($BFO-C$)・双線形外乱分離オブザーバ制御器 ($BPIO-C$) と、それに付随する3つのオブザーバ: 双線形 H_∞ オブザーバ (BHO)・双線形全次元オブザーバ (BFO)・双線形外乱分離オブザーバ ($BPIO$) を、熱交換器実験装置に実際に適用してその効果を検証する。シミュレーションと実験では Fig. 6.1 に示した実験熱交換器を用いる [31][32][68][69]。この実験熱交換器は、溝を掘った2枚の亚克力板に薄い銅板を挟み、それぞれの溝の間を、電磁弁で流量を実験的に操作された冷水と温水が流れている。内部温度はセンサで実験的に計測できる機構になっている。

6.1 シミュレーションと実験の順序と目的

シミュレーションと実験の順序と目的は以下の節の順で構成される。6.2 節では、3制御器と3オブザーバの比較をそれぞれ行い、各制御則の基本的な性能を掴み、実機に対し最も有効である制御則を選定する。6.2.1 項において、シミュレーションにより、3制御器の制御性能の比較を行う。6.2.2 項において、オブザーバ性能1ではシミュレーションにより、オブザーバ性能2では実験により3オブザーバの性能比較を行う。6.3 節では、6.2 節で示された実機有効な制御則に基づき、シミュレーションと実験を行い、PD 制御と比較しながら詳しい検証を行う。6.4 節では、その制御器における線形制御と双線形制御の簡単な比較シミュレーションを行う。6.5 節では、これらの節で得られた結果より、本論文において提案された制御則の実用性を考察する。

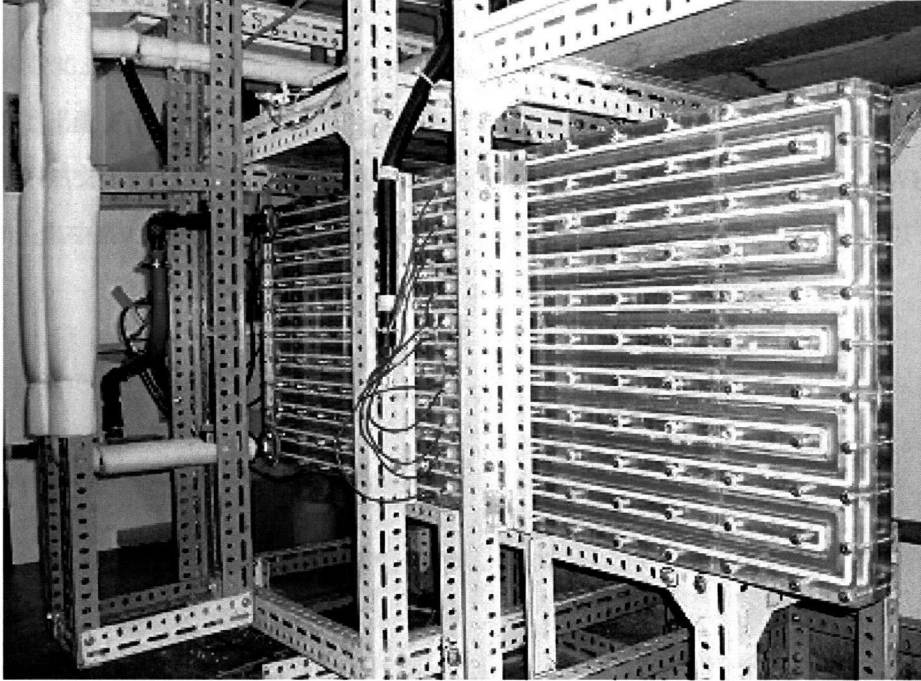


Fig. 6.1: Experimental heat exchanger

6.2 3制御器と3オブザーバの比較

この節では提案した定理に基づき、3制御器と3オブザーバの比較を行う。これらの比較は、以下に述べる実験環境にて行われる。

熱交換器は第1・第2流体に対し、一定流量 $F_{1s} = 5.76[\ell/\min]$, $F_{2s} = 2.93[\ell/\min]$ の下で以下の定常状態に保たれている。

- 第1流体 (冷水):

$$\theta_1(0,0) = 14.2[^\circ\text{C}], \quad \theta_1(0,0.45) = 22.12[^\circ\text{C}], \quad \theta_1(0,1) = 26.37[^\circ\text{C}]$$

- 第2流体 (温水):

$$\theta_2(0,0) = 57.6[^\circ\text{C}], \quad \theta_2(0,0.45) = 42.46[^\circ\text{C}], \quad \theta_2(0,1) = 34.74[^\circ\text{C}]$$

無次元時間 t と実時間 $\tau[\text{s}]$ の関係は $t = \tau/35.9$ であり (定常流量時、第2流体が本熱交換器を通り抜

ける時間が約 35.9[s] より)、サンプリングタイムは $\delta t = 0.1/35.9$ である。未知外乱 $\omega(\tau)$, 入力 $u(\tau)$ に対し、第1流量 $F_1(\tau) = F_{1s}(1 + \omega(\tau))$, 第2流量 $F_2(\tau) = F_{2s}(1 + u(\tau))$ の関係になっている。

この分布系熱交換器システムに対し、低次元であるが実験精度が高い $N = 3$ の MWR 展開次数を与え [69]、集中系の双線形システムに近似する。この時、 (\mathcal{HEX}) の状態ベクトルは以下で与えられる。

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \end{bmatrix}^T$$

(\mathcal{HEX}) の各行列要素は以下の数値で与えられる。

$$\mathbf{A}_\eta = \begin{bmatrix} -24.6 & -3.93 & -0.00 & 1.07 & 0 & 0 \\ 58.9 & -1.07 & -5.89 & 0 & 1.07 & 0 \\ -39.3 & 0 & -1.07 & 0 & 0 & 1.07 \\ 1.07 & 0 & 0 & -13.1 & -2 & -0.00 \\ 0 & 1.07 & 0 & 30.0 & -1.07 & -3.00 \\ 0 & 0 & 1.07 & -20.0 & 0 & -1.07 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\eta\omega}(\boldsymbol{\eta}) &= \mathbf{B}_{\eta\omega} + \mathbf{M}_{\eta\omega}\boldsymbol{\eta} \\ &= \begin{bmatrix} -380 \\ 1050 \\ -718 \\ -104 \\ 290 \\ -198 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -23.8 & -3.93 & -0.00 & 0.232 & 0 & 0 \\ 58.9 & -0.232 & -5.89 & 0 & 0.232 & 0 \\ -39.3 & 0 & -0.232 & 0 & 0 & 0.232 \\ 0.232 & 0 & 0 & -0.232 & 0 & 0 \\ 0 & 0.232 & 0 & 0 & -0.232 & 0 \\ 0 & 0 & 0.232 & 0 & 0 & -0.232 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{\eta u}(\eta) &= B_{\eta u} + M_{\eta u}\eta \\
&= \begin{bmatrix} 245 \\ -680 \\ 463 \\ 240 \\ -665 \\ 453 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.543 & 0 & 0 & 0.543 & 0 & 0 \\ 0 & -0.543 & 0 & 0 & 0.543 & 0 \\ 0 & 0 & -0.543 & 0 & 0 & 0.543 \\ 0.543 & 0 & 0 & -12.5 & -2 & -0.00 \\ 0 & 0.543 & 0 & 30.0 & -0.543 & -3.00 \\ 0 & 0 & 0.543 & -20.0 & 0 & -0.543 \end{bmatrix} \eta
\end{aligned}$$

計測ポイントと観測行列は以下の数値で与えることとする。

$$l_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_\theta(l_y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

($BDIO$) を設計するため、3.2.1 項に基づき、以下の相似変換行列を使用する。

$$T_{B_{\eta\omega}} = \begin{bmatrix} 1.99 \times 10^{-4} & 5.53 \times 10^{-4} & -3.77 \times 10^{-4} & -5.49 \times 10^{-4} & 1.52 \times 10^{-4} & -1.04 \times 10^{-4} \\ 0.764 & 0.543 & 0.311 & 0.0454 & -0.126 & 0.0857 \\ -0.520 & 0.311 & 0.788 & -0.0309 & 0.0857 & -0.0583 \\ -0.0758 & 0.0454 & -0.0309 & 0.996 & 0.0125 & -0.00850 \\ 0.210 & -0.126 & 0.0857 & 0.0125 & 0.965 & 0.0236 \\ -0.143 & 0.0857 & -0.0583 & -0.00850 & 0.0236 & 0.984 \end{bmatrix}$$

$$T_\theta = \begin{bmatrix} -0.0213 & -0.00586 \\ -0.265 & 0.964 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{T_{B\eta\omega}} &= \begin{bmatrix} 1 & -0.0345 & -0.0123 & -0.00455 & -0.00949 & -0.00339 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{T}_\eta &= \begin{bmatrix} -0.0213 & -0.0213 & -0.0213 & -0.00586 & -0.00586 & -0.00586 \\ 0.764 & 0.543 & 0.311 & 0.0454 & -0.126 & 0.0857 \\ -0.520 & 0.311 & 0.788 & -0.0309 & 0.0857 & -0.0583 \\ -0.0758 & 0.0454 & -0.0309 & 0.996 & 0.0125 & -0.00850 \\ 0.210 & -0.126 & 0.0857 & 0.0125 & 0.965 & 0.0236 \\ -0.143 & 0.0857 & -0.0583 & -0.00850 & 0.0236 & 0.984 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

6.2.1 制御性能比較

この項では、3種類の制御器 ($BHO-C$)($BFO-C$)($BDO-C$) の制御性能比較を行う。制御目的は未知外乱 $\omega(\tau)$ の下、入力 $u(\tau)$ を操作することで、任意の τ に対し、 $\theta_2(\tau, 1) = 34.74[^\circ\text{C}]$ ($\Delta\theta_2(\tau, 1) = 0[^\circ\text{C}]$) の状態を保つ事とする。この時、評価ポイントと観測行列は以下の数値で与えられる。

$$\mathbf{l}_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_\theta(\mathbf{l}_z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

重み周波数 $\mathbf{W}(s)$ には以下のような低ゲインの重み \mathbf{W}_1 と高ゲインの重み \mathbf{W}_2 の2種類を使用する。

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_1(s) &= \text{diag}.[0, \mathbf{W}_{\theta_2}], & \mathbf{W}_{\theta_2}(s) &= \frac{0.1s + 1.8}{s + 5} \\
\mathbf{W}_2(s) &= \text{diag}.[0, \mathbf{W}_{\theta_2}], & \mathbf{W}_{\theta_2}(s) &= \frac{s + 18}{s + 5}
\end{aligned}$$

$$B_u(x) = \begin{bmatrix} 245 \\ -680 \\ 463 \\ 240 \\ -665 \\ 453 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.543 & 0 & 0 & 0.543 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.543 & 0 & 0 & 0.543 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.543 & 0 & 0 & 0.543 & 0 \\ 0.543 & 0 & 0 & -12.5 & -2 & -0.00 & 0 \\ 0 & 0.543 & 0 & 30.0 & -0.543 & -3.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0.543 & -20.0 & 0 & -0.543 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

($\mathcal{BHO}-C$)の設定パラメタは $\gamma = 12$, $\varepsilon_e = 10$, $\varepsilon_{\hat{x}} = 0.01$ を使用する。また、($\mathcal{BFO}-C$)($\mathcal{BDIO}-C$)の($\mathcal{SDRE}-X$)設定パラメタは共に $\alpha = 12$, $\mu_\omega = 0.4$, $\mu_u = 0.3$, $\varepsilon_x = 0.0001$ を使用し、($\mathcal{SDRE}-Y$)設定パラメタは共に $\lambda = 1$, $\beta = 2$, $\varepsilon_e = 0.01$ を使用する。(\mathcal{BFO})のオブザーバゲイン L は注意 3.2 に従った以下を使用する。

$$L^T = \begin{bmatrix} 1.21 & 11.9 & -0.0488 & -0.0692 & 1.66 & -0.724 \\ -0.0718 & 1.18 & -0.244 & 2.48 & 11.7 & 0.381 \end{bmatrix}$$

(\mathcal{BDIO})のオブザーバゲイン L は注意 3.4 に従った以下を使用する。

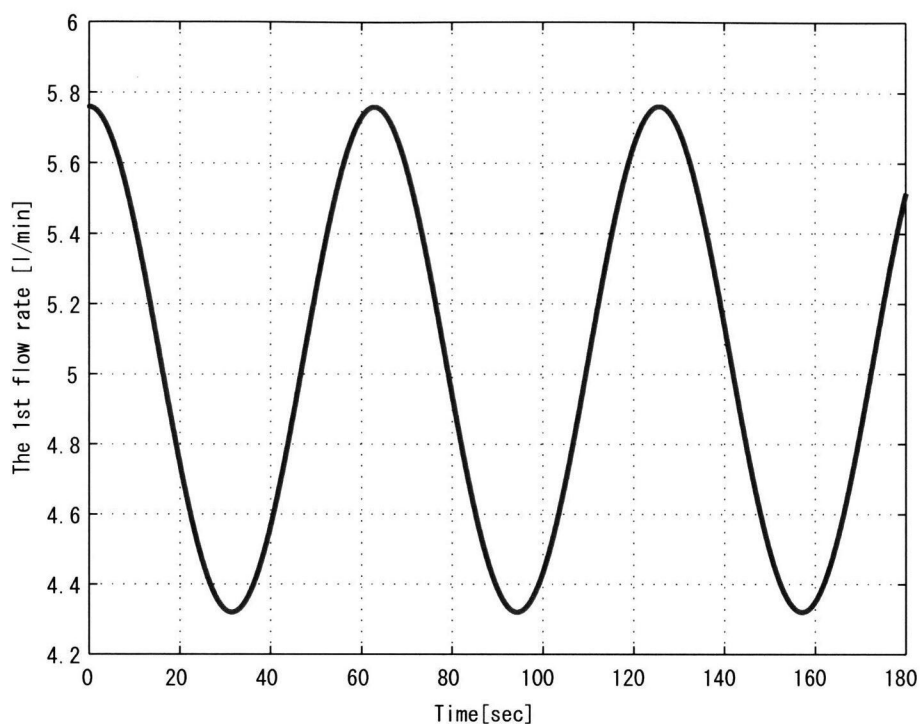
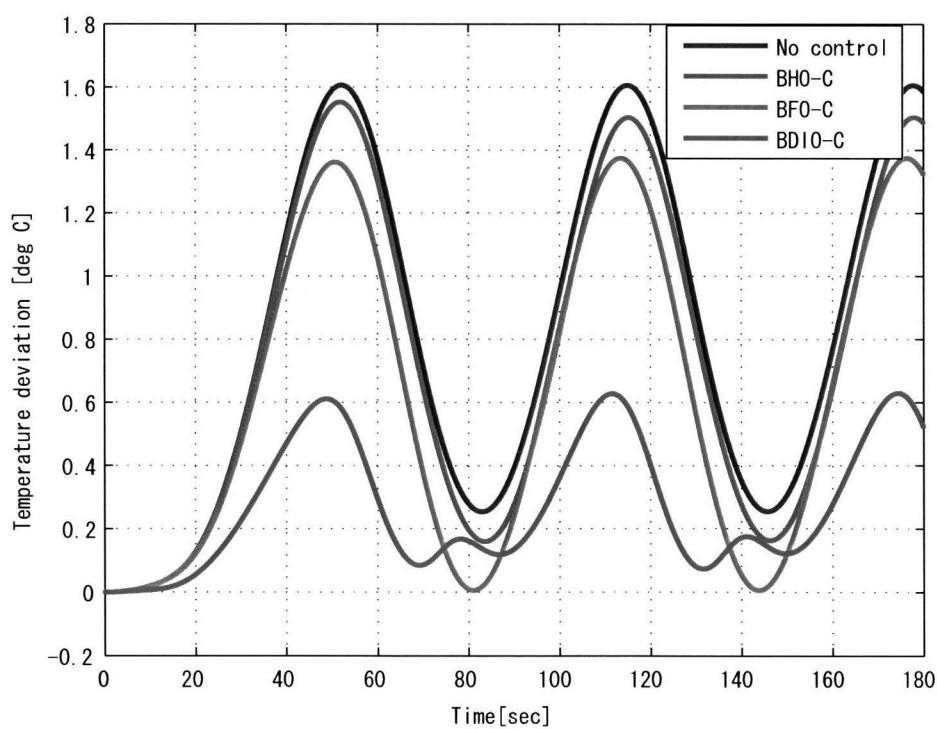
$$L^T = \begin{bmatrix} -235 & 424 & -255 & 333 & -61.0 \end{bmatrix}$$

Figs. 6.2 - 6.7 に結果を示す。

制御性能

シミュレーション結果

- Fig. 6.2 は適用した外乱 $\omega = -0.125\{1 - \cos(0.1\tau)\}$ を示している。第一流体に定常流量 $F_{1s} = 5.76[\ell/\text{min}]$ が流れている事は既知であるが、その変動 ω を計測できない状況下であるとする。この未知外乱流量において、重み周波数 \mathbf{W}_1 , \mathbf{W}_2 を用いた3種類の制御性能を比較する。
- Fig. 6.3 は低ゲイン周波数重み \mathbf{W}_1 での3種類の制御と非制御 (no control) における評価温度 $\Delta\theta_2(t, 1)$ を示している。Fig. 6.3 において、 $(BDIO - C)$ が最も良い性能を示し、次に $(BFO - C)$ 、最も悪かったのが $(BHO - C)$ という結果になった。 $(BFO - C)$ と $(BHO - C)$ が No control での温度振幅とほぼ一緒になってしまう原因は、低ゲインの周波数重み \mathbf{W}_1 を使用したために、フィードバックゲインが小さくなってしまったからと考えられる。しかし、同様の条件における $(BDIO - C)$ では、その温度振幅を半分以上に抑制出来ている事が分かる。
- Fig. 6.4 は高ゲイン周波数重み \mathbf{W}_2 での3種類の制御と No control における評価温度 $\Delta\theta_2(t, 1)$ を示している。Fig. 6.4 において、 $(BDIO - C)$ が最も良い性能を示し、次に $(BHO - C)$ 、最も悪かったのが $(BFO - C)$ という結果になった。高ゲインの周波数重み \mathbf{W}_2 を使用したために、フィードバックゲインが大きくなり、全制御の抑制効果高くなっている事が分かる。特に $(BDIO - C)$ はほぼ $\Delta\theta_2(\tau, 1) = 0[^\circ\text{C}]$ を達成している事が分かる。
- Fig. 6.5 は、Figs. 6.3, 6.4 での $(BHO - C)$ の安定十分条件 ΔU の値を示している。 \mathbf{W}_1 , \mathbf{W}_2 それぞれにおいて $\Delta U < 0$ を大きく逸脱しており、実用での危険性が高い事が予測される。
- Fig. 6.6 は、Figs. 6.3, 6.4 での $(BFO - C)$ の安定十分条件 ΔU の値を示している。 \mathbf{W}_1 において $\Delta U < 0$ は全て満たされている。しかし \mathbf{W}_2 においては $\Delta U < 0$ をほぼ満たしておらず、実機において発散する可能性が考えられる。
- Fig. 6.7 は、Figs. 6.3, 6.4 での $(BFO - C)$ の安定十分条件 ΔU の値を示している。 \mathbf{W}_1 において $\Delta U < 0$ は全て満たされている。しかし \mathbf{W}_2 においては $\Delta U < 0$ を満たしていない部分が非常に多く、実機において発散する可能性が考えられる。

Fig. 6.2: *Simulation: disturbance flow rate (cool water)*Fig. 6.3: *Simulation: controlled temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ under H_∞ controllers with \mathbf{W}_1 and no control*

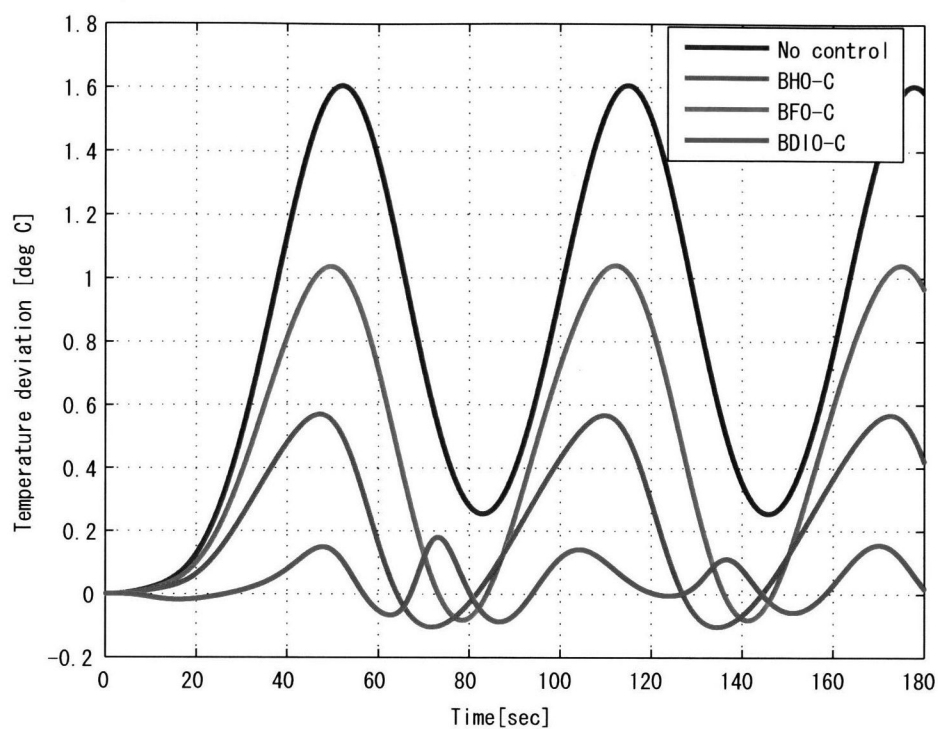


Fig. 6.4: *Simulation*: controlled temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ under H_∞ controllers with W_2 and no control

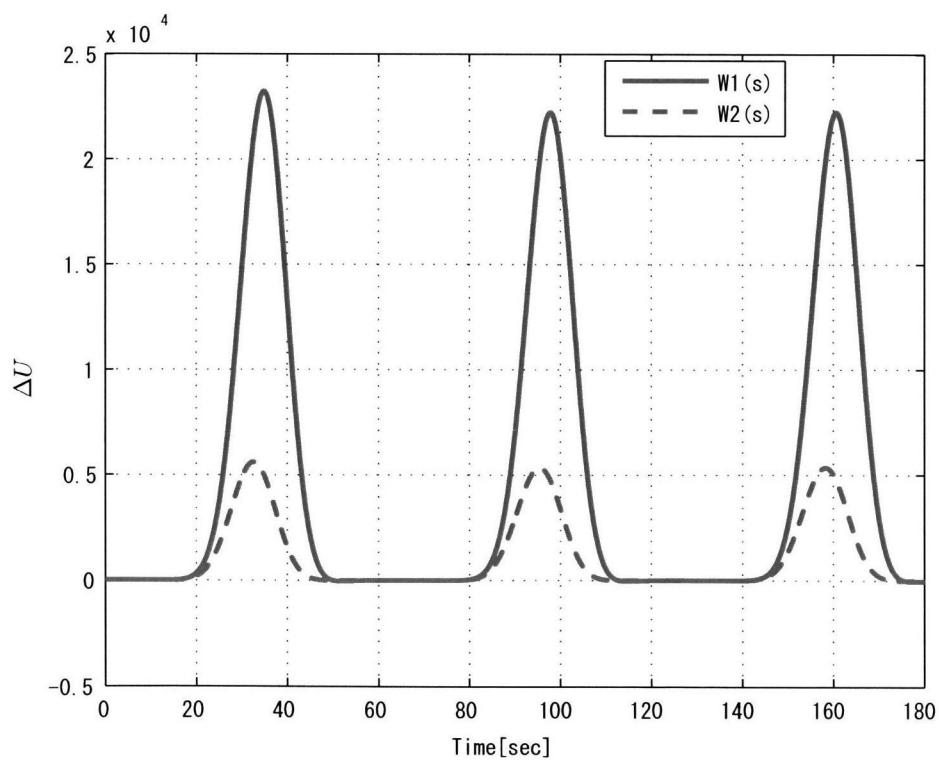


Fig. 6.5: *Simulation*: ΔU under $(BHO - C)$ with W_1 and W_2

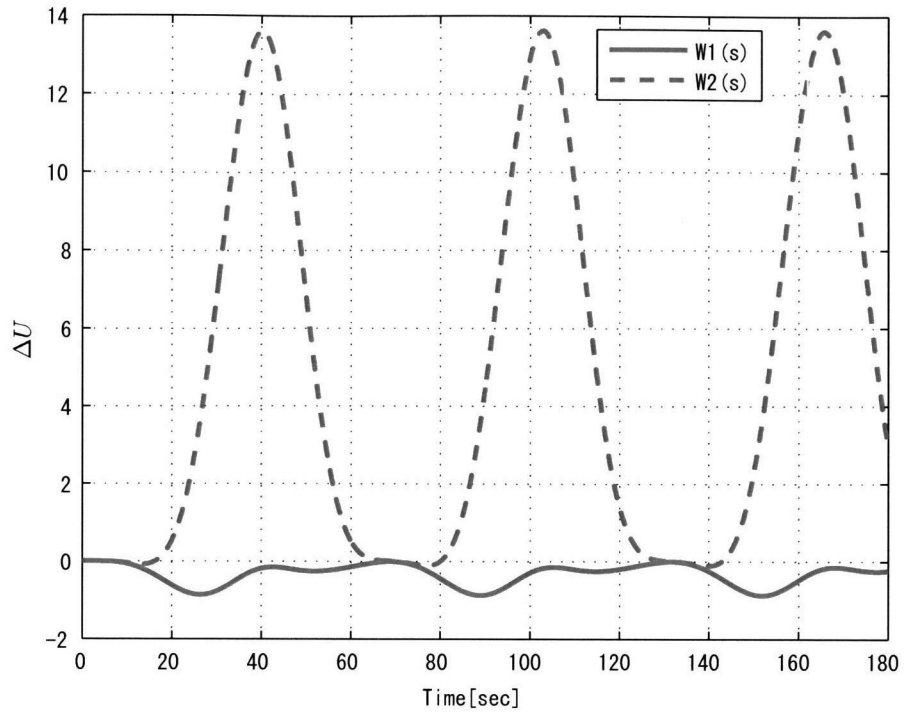


Fig. 6.6: *Simulation: ΔU under $(BFO - C)$ with W_1 and W_2*

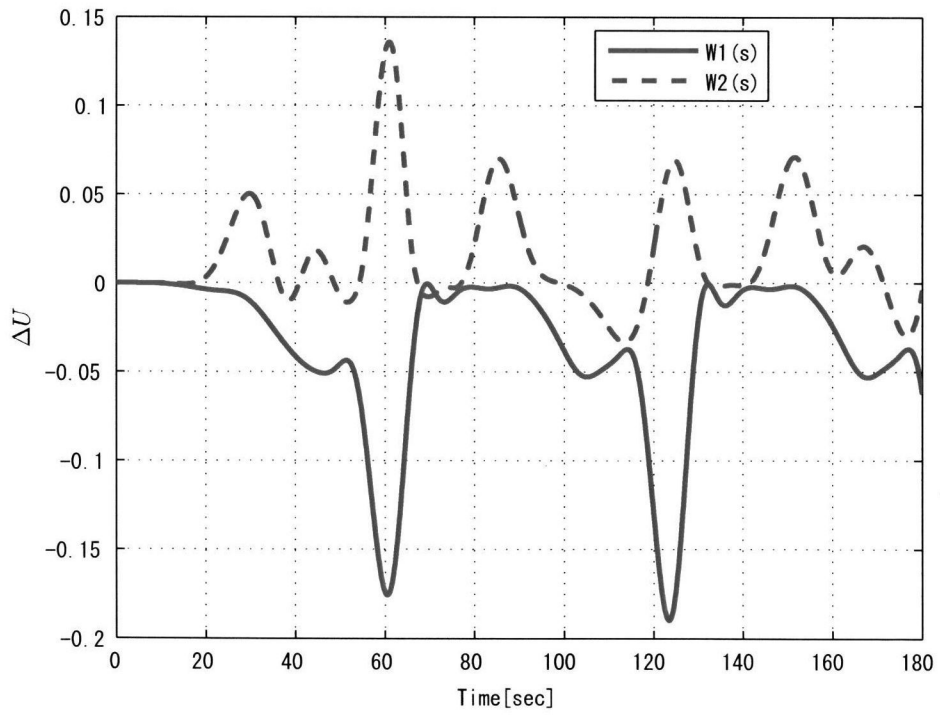


Fig. 6.7: *Simulation: ΔU under $(BDIO - C)$ with W_1 and W_2*

6.2.2 オブザーバ性能比較

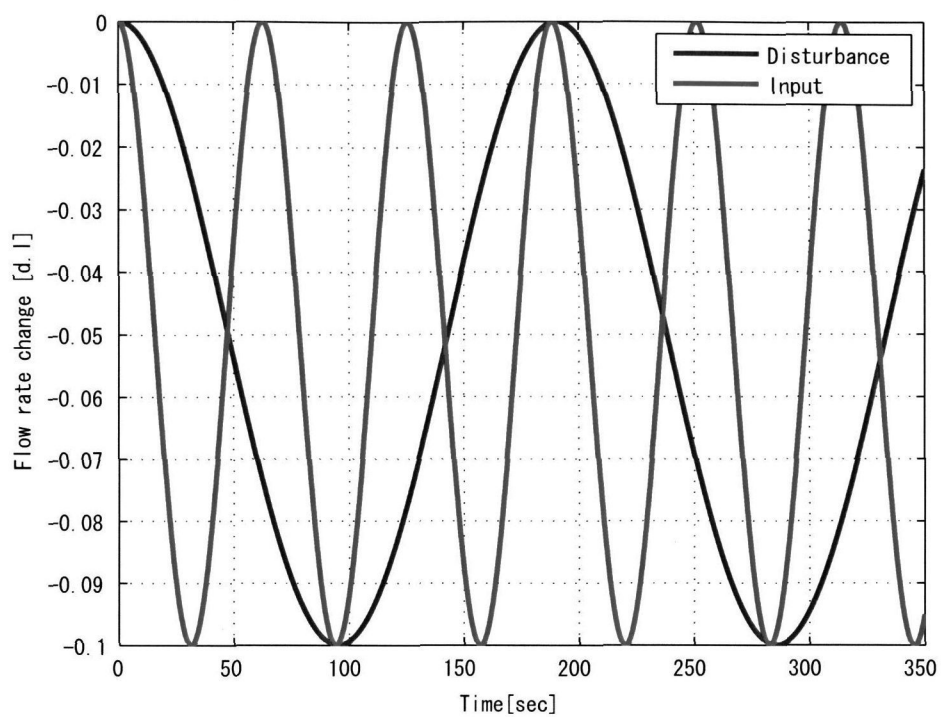
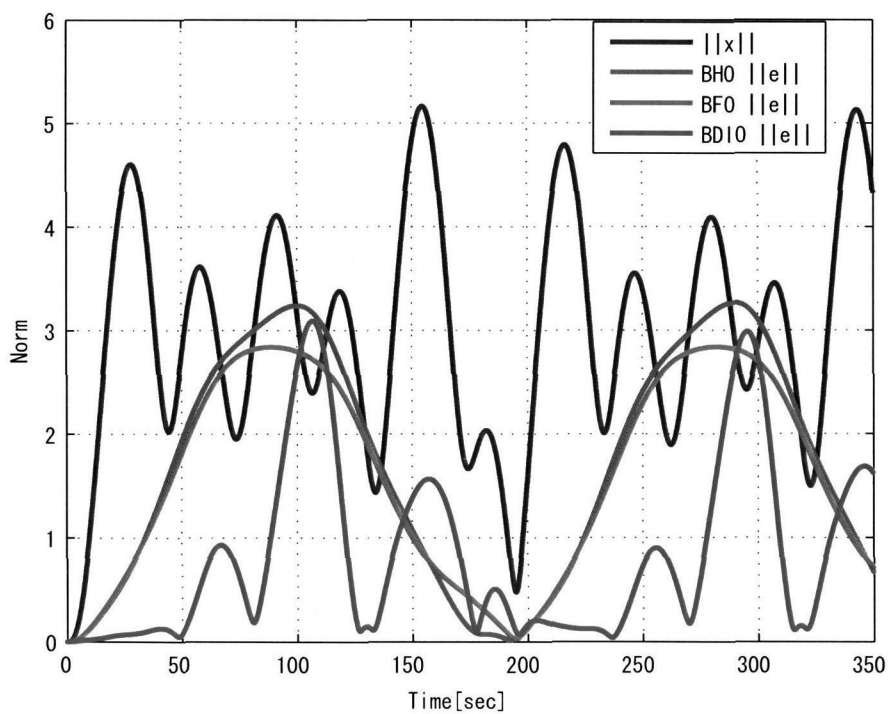
この項では、3種類のオブザーバ $(BHO)(BFO)(BDIO)$ の性能比較を行う。

オブザーバ性能 1

初めに、 $(GHEX)$ の状態量 \mathbf{x} と推定状態量 $\hat{\mathbf{x}}$ の推定誤差 $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ のシミュレーション評価を行う。5章注意 5.1 より、 $(BFO)(BDIO)$ に対しては重み状態量 \mathbf{x}_W の推定誤差は生じないため、 $\mathbf{e} = [(\boldsymbol{\eta} - \hat{\boldsymbol{\eta}})^T \mathbf{o}^T]^T$ となる。5章注意 5.5 より、 (BHO) に対しては、重み状態量 \mathbf{x}_W の推定誤差が生じる。重み状態量の推定誤差の影響を小さくするために、前項の低ゲイン重み $\mathbf{W}_1(s)$ で $(GHEX)$ を構成する。推定誤差の収束性 (有界性) に関する各 $(SDRE-Y)$ の設定パラメタは前項と同じ値を使用する。また、 $(BFO)(BDIO)$ のオブザーバゲイン \mathbf{L} は前項と同様のものを使用する。Figs. 6.8 - 6.11 に結果を示す。

シミュレーション結果

- Fig. 6.8 は適用した入力 $u = -0.05\{1 - \cos(0.1\tau)\}$ と外乱 $\omega = -0.05\{1 - \cos(0.033\tau)\}$ を示している。この入力・外乱下において3種類のオブザーバの推定精度を比較する。
- Fig. 6.9 は $(GHEX)$ の状態ノルム $\|\mathbf{x}\|$ と3種類のオブザーバでの推定誤差ノルム $\|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|$ を示している。誤差面積を考慮すると、 $(BDIO)$ が最も誤差が少なく、次に (BFO) と (BHO) の順で誤差が広がっている。特に (BFO) と (BHO) の誤差ノルムは、入力値に関係なく外乱と同期しており、外乱の変動分だけ増減していることが分かる。一方、外乱を陽に考慮した $(BDIO)$ は、 $(BFO)(BHO)$ で生じた誤差ノルムを低減している事が分かる。
- Fig. 6.9 の $\tau = 200[s]$ において、 (BHO) の SDRE 解 $\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})$ とオブザーバゲイン $\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{C}_y^T$ を調べてみる。以下に結果を表示する。

Fig. 6.8: *Simulation: disturbance ω and input u* Fig. 6.9: *Simulation: norms of state and error vector under three observers*

$$Y = \begin{bmatrix} 4240 & -9770 & 5620 & 1640 & -4330 & 2760 & 2.34 \\ -9770 & 25700 & -16200 & -3070 & 9370 & -6510 & -5.38 \\ 5620 & -16200 & 10700 & 1470 & -5080 & 3760 & 3.00 \\ 1640 & -3070 & 1470 & 782 & -1810 & 1040 & 0.870 \\ -4330 & 9370 & -5080 & -1810 & 4670 & -2900 & -2.32 \\ 2760 & -6510 & 3760 & 1040 & -2900 & 1900 & 1.79 \\ 2.34 & -5.38 & 3.00 & 0.870 & -2.32 & 1.79 & 1.06 \end{bmatrix}$$

$$C_y Y = \begin{bmatrix} 88.5 & -186 & 129 & 33.9 & -36.9 & 8.18 & -0.0500 \\ 64.6 & -212 & 154 & 10.4 & -41.1 & 37.3 & 0.340 \end{bmatrix}$$

前項の (BFO) のオブザーバゲイン L の値と比べると、 $\hat{\eta}$ に影響を与える (BHO) のオブザーバゲイン $Y(\hat{x})C_y^T$ の要素はかなりハイゲインであることがわかる。これは実機適用の際に、実装誤差で生じた推定温度誤差 $(y - C_y \hat{x})$ に対しても (BHO) が敏感であることを意味している。実装誤差が推定値 \hat{x} の更なる誤差を生み、SDRE 解 $Y(\hat{x})$ やオブザーバゲイン $Y(\hat{x})C_y^T$ は予期せぬ値となる危険性がある。

- Fig. 6.10 は、Fig. 6.9 における (BFO) の有界十分条件 $\Delta Y < 0$ を間接的に示している。3章 (3.8) 式より、ここでの誤差の拡張 2 次形式リアプノフ関数の時間微分 \dot{V}_e は、グラフに示した $(\eta - \hat{\eta})^T \Delta Y(u, \eta, \hat{\eta})(\eta - \hat{\eta})$ の値を含む。全ての時間でほぼ 0 より小さいため、(BFO) の推定誤差の有界性が保証される事が分かる。
- Fig. 6.11 は、Fig. 6.9 における (BDIO) の有界十分条件 $\Delta Y < 0$ を間接的に示している。3章 (3.28) 式より、ここでの誤差の拡張 2 次形式リアプノフ関数の時間微分 \dot{V}_e は、グラフに示した $(\bar{\eta}_2 - \hat{\eta}_2)^T \Delta Y(u, \bar{\eta}, \hat{\eta})(\bar{\eta}_2 - \hat{\eta}_2)$ の値を含む。大体の時間で 0 より小さいため、(BDIO) の推定誤差の有界性はまずまず保証される事が分かる。
- (BHO) において、Figs. 6.10, 6.11 に対応するのは 2 章 (2.46) 式の $e^T Y(\hat{x})^{-1} \Delta Y(\hat{x}) Y(\hat{x})^{-1} e$ である。しかしこの値は 0 より大きくても小さくても、(BHO) の推定誤差の有界性を直接保証しないため、ここでは表示していない。

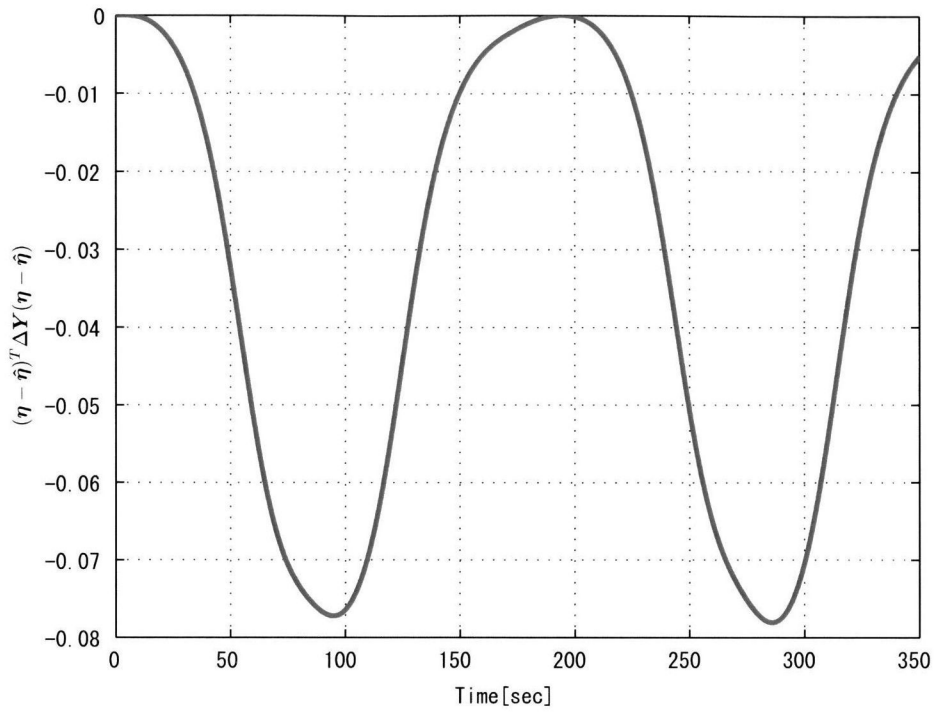


Fig. 6.10: *Simulation: $(\eta - \hat{\eta})^T \Delta Y(u, \eta, \hat{\eta})(\eta - \hat{\eta})$ under (\mathcal{BFO})*

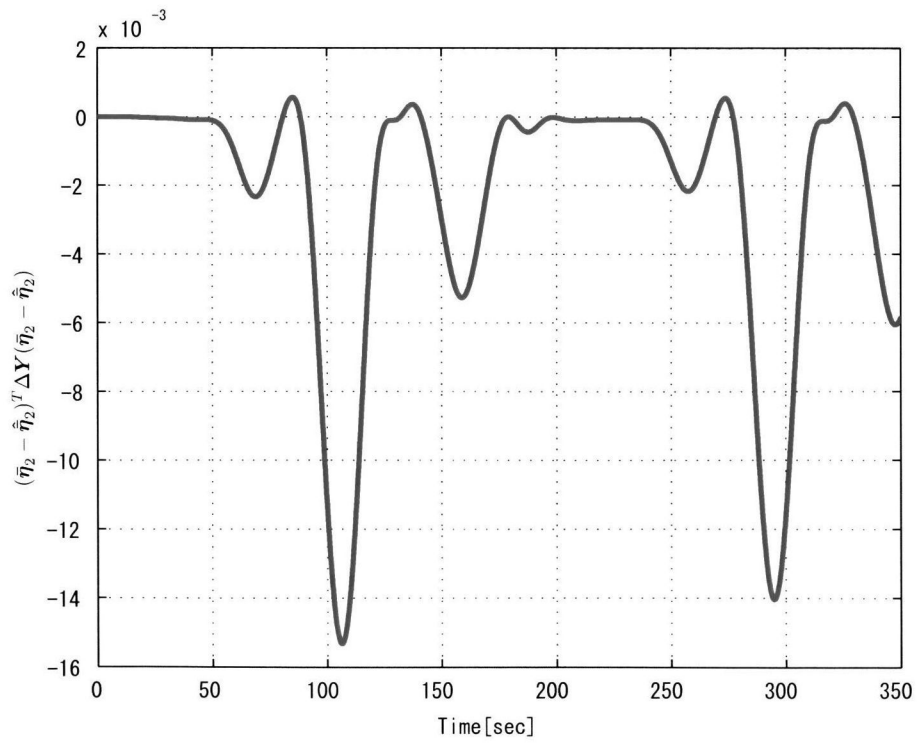


Fig. 6.11: *Simulation: $(\bar{\eta}_2 - \hat{\eta}_2)^T \Delta Y(u, \bar{\eta}, \hat{\eta})(\bar{\eta}_2 - \hat{\eta}_2)$ under (\mathcal{BDIO})*

オブザーバ性能 2

次に、実験より3種類のオブザーバの温度推定精度を比較する。入力にはそれぞれのオブザーバに対応した $(BHO-C)$ $(BFO-C)$ $(BDIO-C)$ を利用する。ただし、フィードバックゲインに関わる $(SDRE-S)$ $(SDRE-X)$ には、ハイゲインを避けるために $\varepsilon_{\hat{x}} = 0$, $\varepsilon_x = 0$, $\mu_\omega = 0$, $\mu_u = 0$ を使用した。他の設定パラメタ・オブザーバゲインは前項と同じ値とし、重み周波数は低ゲイン重み $W_1(s)$ を使用する。Figs. 6.12 - 6.21 に結果を示す。

実験結果

- Fig. 6.12 は適用した外乱 $\omega = -0.125\{1 - \cos(0.1\tau)\}$ を示している。第一流体に定常流量 $F_{1s} = 5.76[\ell/\text{min}]$ が流れている事は既知であるが、その変動 ω を計測できない状況下であるとする。この未知外乱流量と、加えられた各入力流量に対し、3種類オブザーバの温度推定精度を比較する。

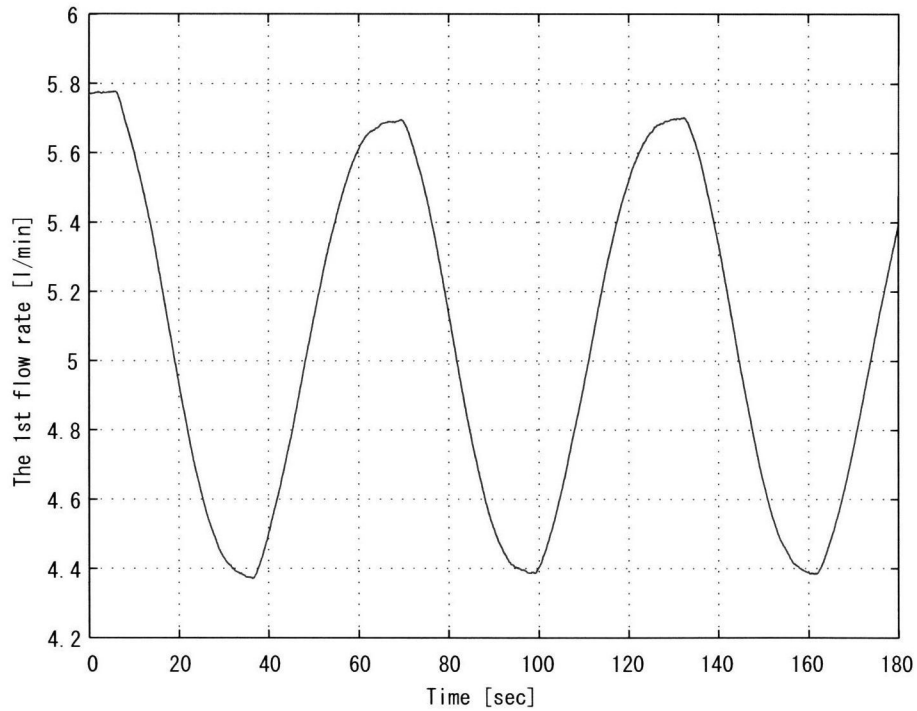


Fig. 6.12: *Experiment: disturbance flow rate (cool water)*

双線形 H_∞ オブザーバ (BHO)

- Fig. 6.13 は、Fig. 6.12 の外乱に対して加えられた入力流量である。
- Fig. 6.14 は、Figs. 6.12, 6.13 における、温水出口温度偏差 $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ と、(BHO) による推定温度を示している。グラフより、計測されて既知である出口温度に対しても、推定温度誤差が大きく生じている事が分かる。
- Fig. 6.15 は、Figs. 6.12, 6.13 における、温水内部温度偏差 $\Delta\theta_2(\tau, 0.45)$ と、(BHO) による推定温度を示している。グラフより、内部温度推定は出口温度推定よりも更に誤差が大きく不正確になっている事が分かる。
- Figs. 6.14, 6.15 の推定温度誤差の原因は、(BHO) のオブザーバゲインがかなり大きくなるため、実環境との小さなモデル化誤差が、推定状態量の誤差に大きく影響し、誤差を拡大していくためであると思われる。
- Figs. 6.14, 6.15 の 100 秒～140 秒付近で発生しているジャークは熱電対増幅回路のノイズ電圧である。既知である出口温度のジャークに対し、(BHO) による推定温度はほぼ無反応である事が分かる。

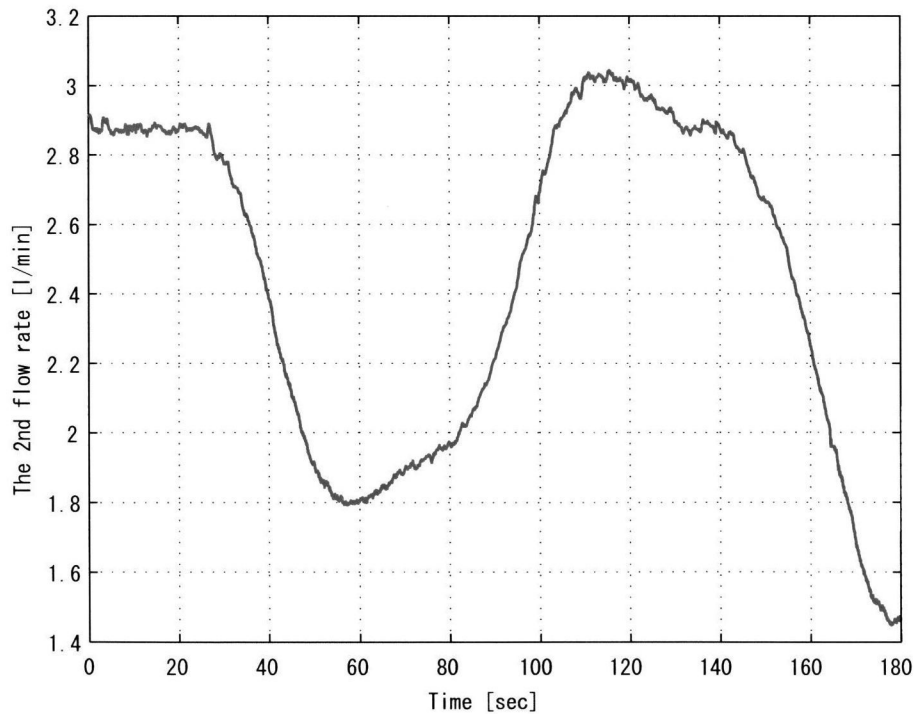
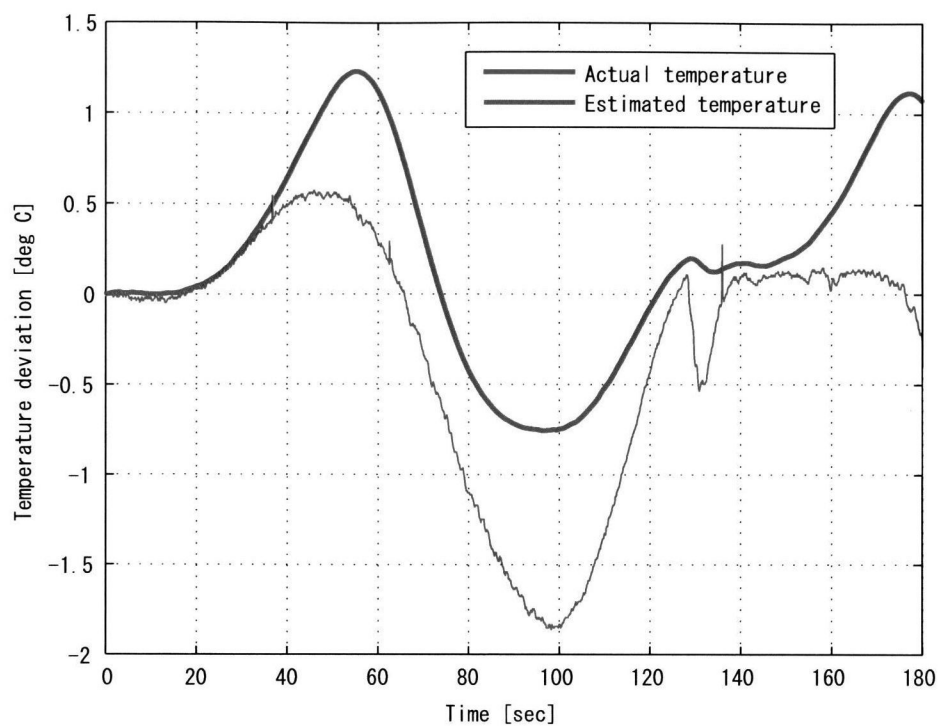
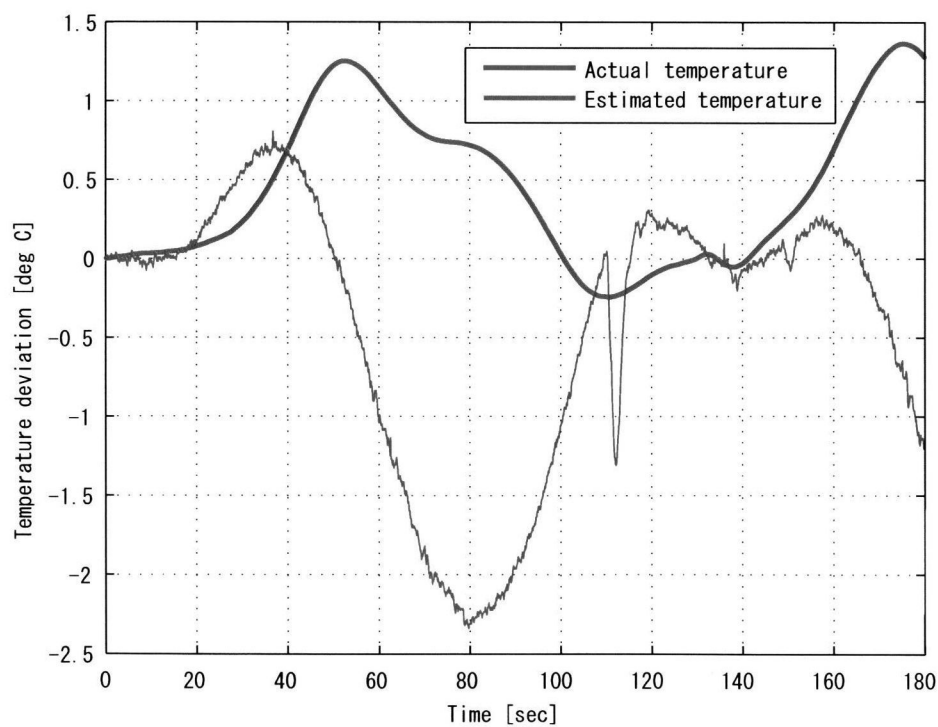


Fig. 6.13: *Experiment*: input flow rate (hot water)

Fig. 6.14: *Experiment*: controlled temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ Fig. 6.15: *Experiment*: internal temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 0.45)$

双線形全次元オブザーバ (BFO)

- Fig. 6.16 は、Fig. 6.12 の外乱に対して加えられた入力流量である。入力 $u = 0$ にやや近い流量となっている。
- Fig. 6.17 は、Figs. 6.12, 6.16 における、温水出口温度偏差 $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ と、(BFO) による推定温度を示している。グラフより、計測されて既知である出口温度に対しては、推定温度誤差はあまり生じていない事が分かる。
- Fig. 6.18 は、Figs. 6.12, 6.16 における、温水内部温度偏差 $\Delta\theta_2(\tau, 0.45)$ と、(BFO) による推定温度を示している。グラフより、推定内部温度は実温度の変動分だけ、外乱の変動分だけ誤差になっている事が分かる。これは、オブザーバ性能 1 の Figs. 6.9, 6.10 で示された通り、(BFO) の推定誤差は有界に納まるが、外乱が加わった時の推定精度は低い事を示している。
- Figs. 6.17, 6.18 の 100 秒～140 秒付近で発生しているジャークは熱電対増幅回路のノイズ電圧である。既知である出口温度のジャークに対し、(BFO) による推定温度は即座に反応している事が分かる。

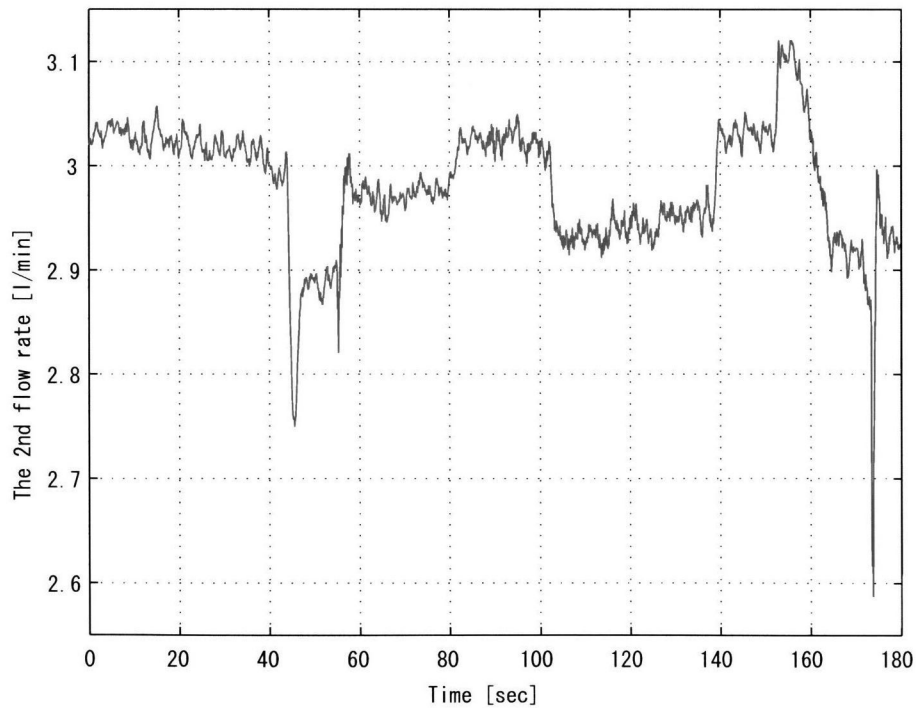
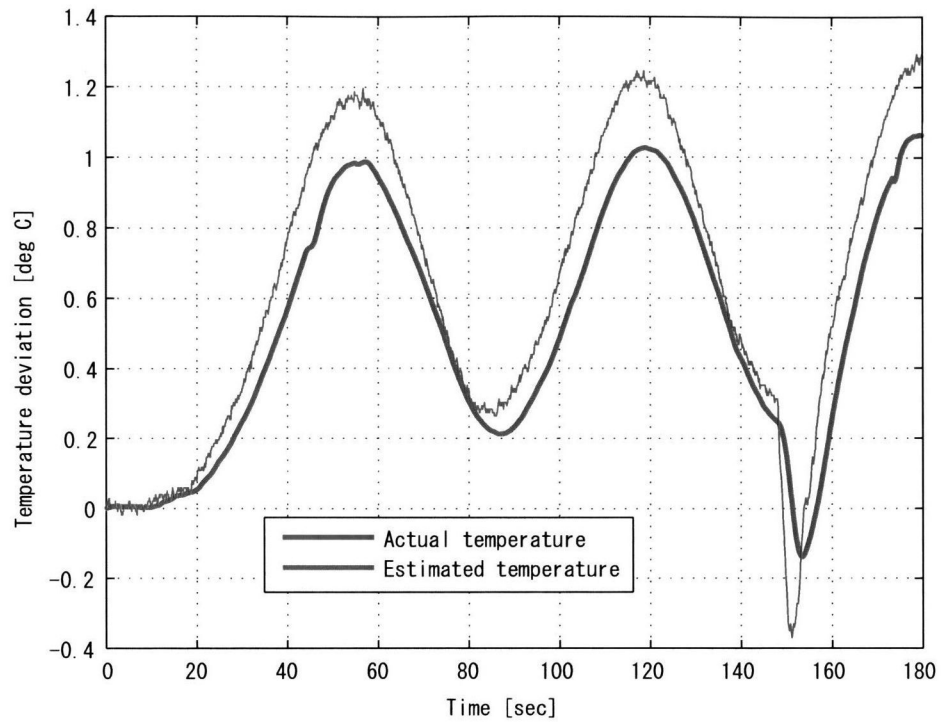
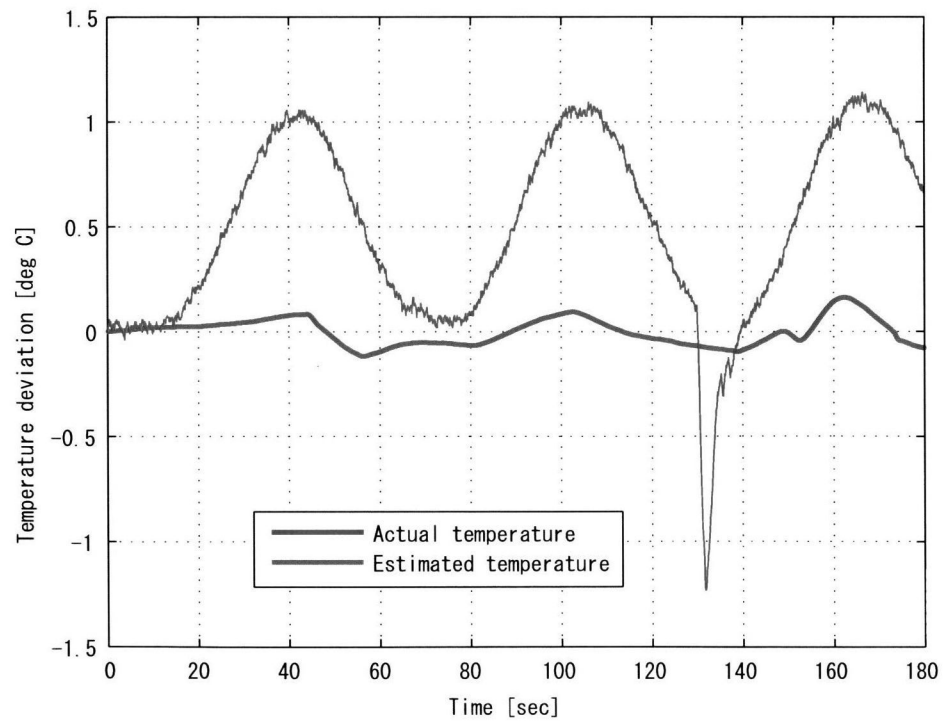


Fig. 6.16: *Experiment*: input flow rate (hot water)

Fig. 6.17: *Experiment*: controlled temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ Fig. 6.18: *Experiment*: internal temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 0.45)$

双線形外乱分離オブザーバ (*BDIO*)

- Fig. 6.19 は、Fig. 6.12 の外乱に対して加えられた入力流量と、未入力 (no input) 流量である。
- Fig. 6.20 は、Figs. 6.12, 6.19 における、温水出口温度偏差 $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ と、(*BDIO*) による推定温度を示している。グラフより、未知外乱 ω の下において、入力 u の有無に関わらず、(*BDIO*) の推定出口温度は実温度と一致しており、ほとんど誤差を出さない事が分かる。
- Fig. 6.21 は、Figs. 6.12, 6.19 における、温水内部温度偏差 $\Delta\theta_2(\tau, 0.45)$ と、(*BDIO*) による推定温度を示している。グラフより、未知外乱 ω において、未入力 $u = 0$ の場合はまずまず正確な内部温度推定を実現している事が分かる。入力 u が加わった場合においても、(*BDIO*) の推定温度はある程度実温度と等しい事が分かる。しかし、実温度の軌道と逆向きに推定温度誤差が出る場合も見受けられる。これは、オブザーバ性能 1 の Fig. 6.11 で示した、有界性条件を満たしていない部分が多少存在することより、この (*BDIO*) が場合によっては不安定になる事が要因と考えられる。

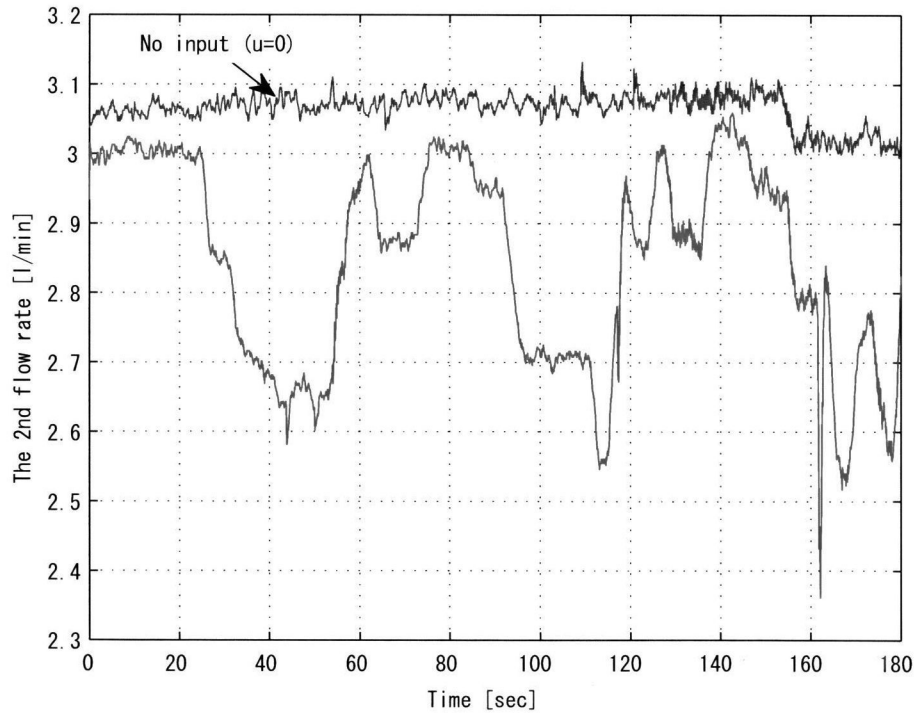
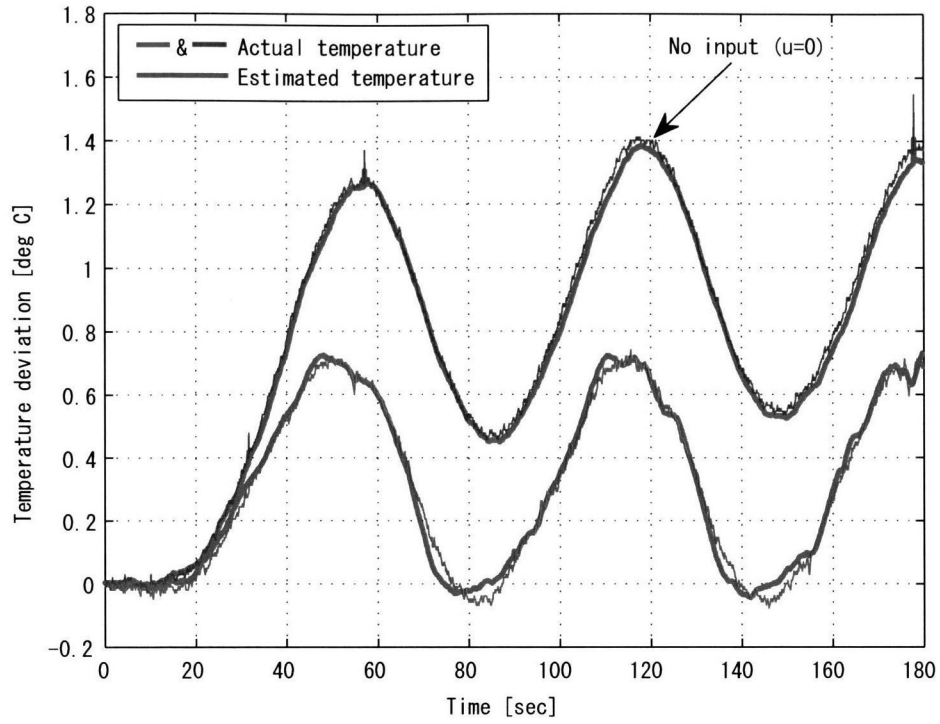
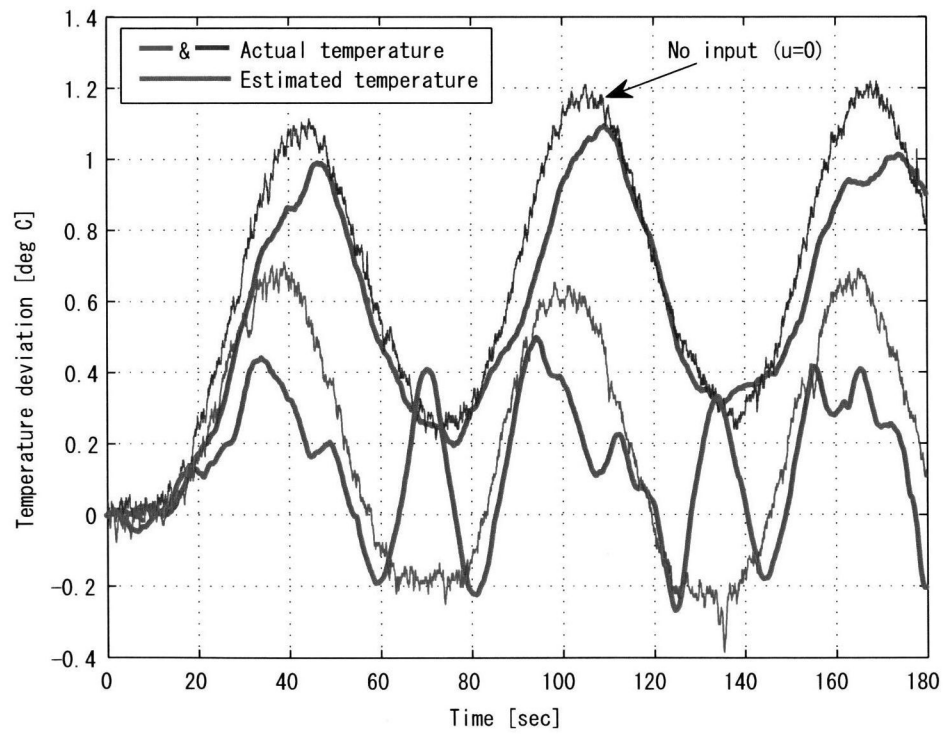


Fig. 6.19: *Experiment*: input flow rate (hot water)

Fig. 6.20: *Experiment*: controlled temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ Fig. 6.21: *Experiment*: internal temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 0.45)$

6.3 双線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御

この節では最も良い性能を示した制御則 ($BDIO - C$) に基づき、シミュレーションと実機実験を行う。

熱交換器は第1・第2流体に対し、一定流量 $F_{1s} = 5.18[\ell/\text{min}]$, $F_{2s} = 3.02[\ell/\text{min}]$ の下で以下の定常状態に保たれている。

- 第1流体 (冷水):

$$\theta_1(0,0) = 24.6[^\circ\text{C}], \quad \theta_1(0,0.55) = 31.48[^\circ\text{C}], \quad \theta_1(0,1) = 33.61[^\circ\text{C}].$$

- 第2流体 (温水):

$$\theta_2(0,0) = 54.7[^\circ\text{C}], \quad \theta_2(0,0.55) = 42.99[^\circ\text{C}], \quad \theta_2(0,1) = 38.94[^\circ\text{C}].$$

無次元時間 t と実時間 $\tau[\text{s}]$ の関係は $t = \tau/34.9$ であり、サンプリングタイムは $\delta t = 0.1/34.9$ である。未知外乱 $\omega(\tau)$, 入力 $u(\tau)$ に対し、第1流量 $F_1(\tau) = F_{1s}(1 + \omega(\tau))$, 第2流量 $F_2(\tau) = F_{2s}(1 + u(\tau))$ の関係になっている。

制御目的は未知外乱 $\omega(\tau)$ の下、入力 $u(\tau)$ を操作することで、任意の τ に対し、 $\theta_2(\tau, 1) = 38.94[^\circ\text{C}]$ ($\Delta\theta_2(\tau, 1) = 0[^\circ\text{C}]$) の状態を保つ事とする。各設定値は $N = 3$, $\alpha = 2$, $\mu_u = 0.3$, $\mu_\omega = 0.4$, $\varepsilon_x = 0.0001$, を使用し、評価温度 $\Delta\theta(t, l_z)$ は第2流体出口の定常温度偏差 $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ のみと定める。 $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ は計測可能であり、重み状態量 x_W は推定する必要がないため、 $(\mathcal{H}\mathcal{E}\mathcal{X})$ の η にのみ ($BDIO$) を設計する。サンプリングタイムごとに推定値 $\hat{x} = [\hat{\eta}^T x_W^T]^T$ を ($SDRE - \mathcal{X}$) に代入し、 \mathbf{X} を解く。重み周波数 $\mathbf{W}(s)$ には次の2種類を使用する。

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1(s) &= \text{diag}.[0, \mathbf{W}_{\theta_2}], & \mathbf{W}_{\theta_2}(s) &= 0.7 \times \frac{0.1s + 1.8}{s + 5} \\ \mathbf{W}_2(s) &= \text{diag}.[0, \mathbf{W}_{\theta_2}], & \mathbf{W}_{\theta_2}(s) &= 7 \times \frac{0.1s + 1.8}{s + 5} \end{aligned}$$

ここで \mathbf{W}_1 は試行錯誤で決定されており、 \mathbf{W}_2 は条件 $\Delta U < 0$ の十分性の範囲を示すために使用される。状態ベクトルは以下で与えられる。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & x_W \end{bmatrix}^T$$

このとき、各行列は以下の数値で与えられる。

$$\mathbf{W}_1(s) : A_W = -5, \quad \mathbf{B}_W = [0 \ 1], \quad C_W = 0.91, \quad \mathbf{D}_W = [0 \ 0.07]$$

$$\mathbf{W}_2(s) : A_W = -5, \quad \mathbf{B}_W = [0 \ 1], \quad C_W = 9.1, \quad \mathbf{D}_W = [0 \ 0.7]$$

$$\mathbf{A}_\eta = \begin{bmatrix} -21.7 & -3.43 & -0.00 & 1.09 & 0 & 0 \\ 51.5 & -1.09 & -5.15 & 0 & 1.09 & 0 \\ -34.3 & 0 & -1.09 & 0 & 0 & 1.09 \\ 1.09 & 0 & 0 & -13.1 & -2 & -0.00 \\ 0 & 1.09 & 0 & 30.1 & -1.09 & -3.00 \\ 0 & 0 & 1.09 & -20.0 & 0 & -1.09 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{\eta\omega} + \mathbf{M}_{\eta\omega}\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} -212 \\ 591 \\ -403 \\ -126 \\ 353 \\ -241 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -21.0 & -3.43 & -0.00 & 0.410 & 0 & 0 \\ 51.5 & -0.410 & -5.15 & 0 & 0.410 & 0 \\ -34.3 & 0 & -0.410 & 0 & 0 & 0.410 \\ 0.410 & 0 & 0 & -0.410 & 0 & 0 \\ 0 & 0.410 & 0 & 0 & -0.410 & 0 \\ 0 & 0 & 0.410 & 0 & 0 & -0.410 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}$$

$$\mathbf{B}_{\eta u} + \mathbf{M}_{\eta u}\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 195 \\ -543 \\ 371 \\ 144 \\ -402 \\ 274 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.629 & 0 & 0 & 0.629 & 0 & 0 \\ 0 & -0.629 & 0 & 0 & 0.629 & 0 \\ 0 & 0 & -0.629 & 0 & 0 & 0.629 \\ 0.629 & 0 & 0 & -12.6 & -2 & -0.00 \\ 0 & 0.629 & 0 & 30.0 & -0.629 & -3.00 \\ 0 & 0 & 0.629 & -20.0 & 0 & -0.629 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}$$

$$\mathbf{C}_\theta(\mathbf{l}_y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_\theta(\mathbf{l}_z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{B_{\eta\omega}} = \begin{bmatrix} -2.80 \times 10^{-4} & 7.81 \times 10^{-4} & -5.33 \times 10^{-4} & -1.68 \times 10^{-4} & 4.67 \times 10^{-4} & -3.19 \times 10^{-4} \\ 0.680 & 0.629 & 0.253 & 0.0797 & -0.222 & 0.152 \\ -0.464 & 0.253 & 0.827 & -0.0544 & 0.152 & -0.103 \\ -0.146 & 0.0797 & -0.0544 & 0.983 & 0.0477 & -0.0325 \\ 0.407 & -0.222 & 0.152 & 0.0477 & 0.867 & 0.0906 \\ -0.277 & 0.152 & -0.103 & -0.0325 & 0.0906 & 0.938 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} -0.0305 & -0.0182 \\ -0.513 & 0.858 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{T_{B_{\eta\omega}}} = \begin{bmatrix} 1 & -0.0478 & -0.0187 & -0.0145 & -0.0286 & -0.00112 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\eta = \begin{bmatrix} -0.0305 & -0.0305 & -0.0305 & -0.0182 & -0.0182 & -0.0182 \\ 0.680 & 0.629 & 0.253 & 0.0797 & -0.222 & 0.152 \\ -0.464 & 0.253 & 0.827 & -0.0544 & 0.152 & -0.103 \\ -0.146 & 0.0797 & -0.0544 & 0.983 & 0.0477 & -0.0325 \\ 0.407 & -0.222 & 0.152 & 0.0477 & 0.867 & 0.0906 \\ -0.277 & 0.152 & -0.103 & -0.0325 & 0.0906 & 0.938 \end{bmatrix}$$

このシステムに対し、以下のオブザーバゲインを使用する。

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} -1070 & 1750 & -1130 & 1430 & -186 \end{bmatrix}$$

シミュレーションにて $(SDRE-Y)$ を解き、 $\Delta U < 0$ をチェックする。各設定値は \mathbf{W}_1 に対して $\beta = 1, \lambda = 1, \varepsilon_e = 0.001$ を、 \mathbf{W}_2 に対しては $\beta = 1, \lambda = 1, \varepsilon_e = 0.1$ を使用した。

$(BDIO-C)$ の性能を評価するために、振動制御に一般に良く使用される PD 制御を以下の 3 種類のゲイン (k_p, k_d) を用いて比較する。

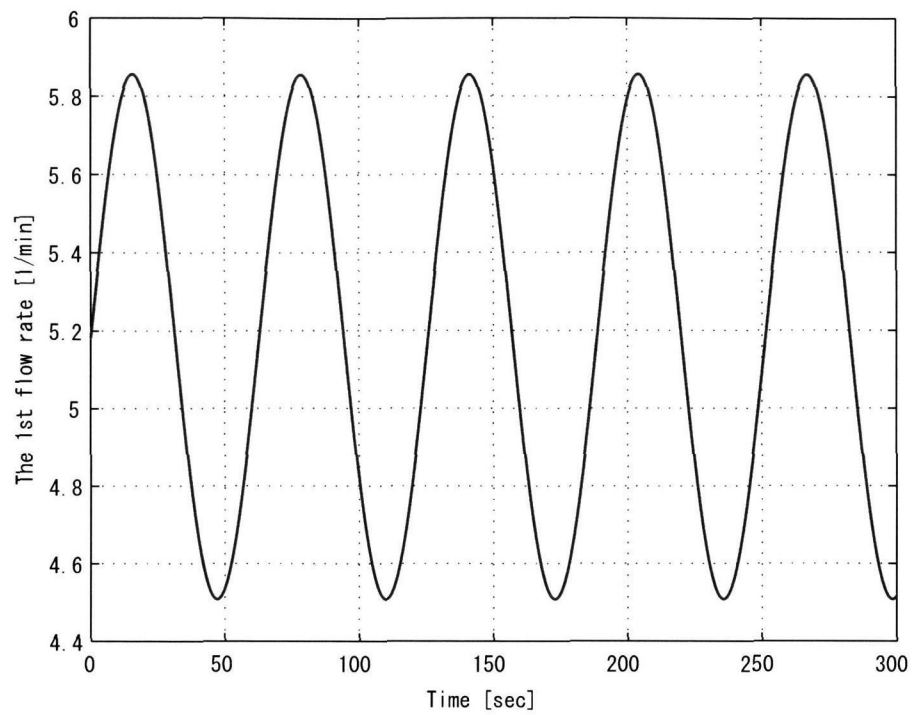
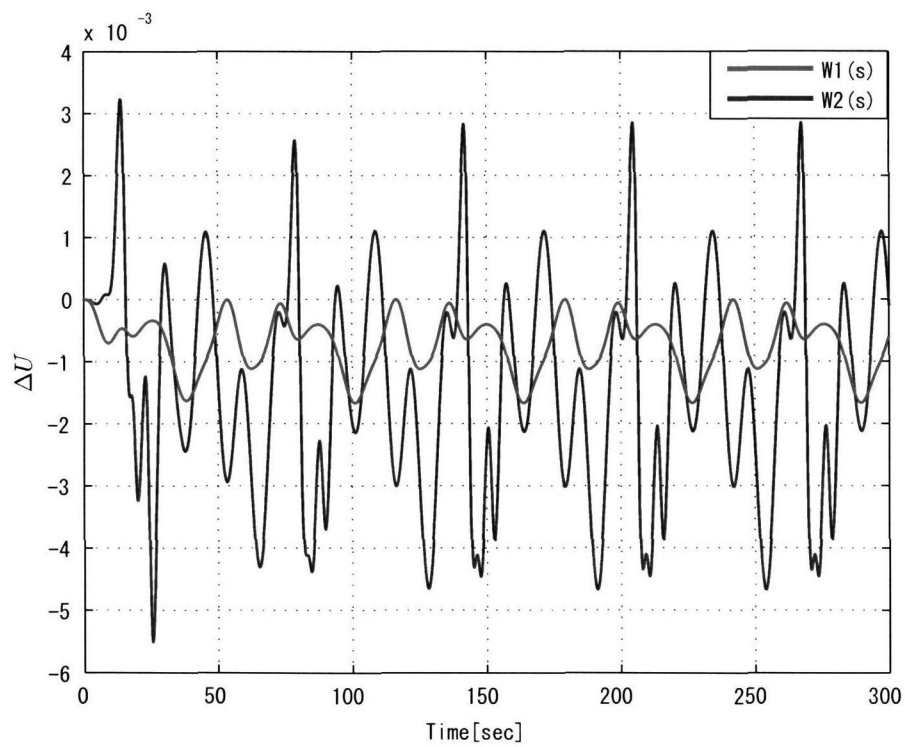
Low: (0.3, 0.02), **Middle:** (0.5, 0.06), **High:** (0.7, 0.08)

Figs. 6.22 - 6.31 に結果を示す。

シミュレーション結果

制御性能

- Fig. 6.22 は適用した外乱 $\omega(\tau) = 0.13 \sin(0.1\tau)$ を示している。第一流体に定常流量 $F_{1s} = 5.18[\ell/\min]$ が流れている事は既知であるが、その変動 ω を計測できない状況下であるとする。
- Fig. 6.23 は $\mathbf{W}_1(s)$ と $\mathbf{W}_2(s)$ を用いた $(BDIO-C)$ における ΔU を表している。 \mathbf{W}_1 に対し、 $\Delta U < 0$ は満足されている。 \mathbf{W}_2 に対し、 $\Delta U < 0$ は完全に満たされていない。
- Figs. 6.24, 6.25 は $(BDIO-C)$ と PD 制御器との制御性能を示している。Fig. 6.24 において、非制御 (no control) 下では $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ が全振幅 $1.05[^\circ\text{C}]$ の発振を行う。Fig. 6.24 において、 $(BDIO-C)$ はそれを \mathbf{W}_1 で $0.71[^\circ\text{C}]$ 、 \mathbf{W}_2 で $0.11[^\circ\text{C}]$ に抑制している。Fig. 6.25 において、PD 制御器は全振幅を **Low** で $0.83[^\circ\text{C}]$ 、**Middle** で $0.57[^\circ\text{C}]$ に抑制できているが、**High** ゲイン PD 制御器はそれを発散させてしまった。発散の原因は、おそらく時間遅れによるものと考えられる。全ての PD 制御器は $300[\text{s}]$ で制状態に辿りついていない。全ての制御器で最も効果的だったのは、 \mathbf{W}_2 の重みを持つ $(BDIO-C)$ である。

Fig. 6.22: *Simulation: disturbance flow rate (cool water)*Fig. 6.23: *Simulation: ΔU under H_∞ controller with \mathbf{W}_1 and \mathbf{W}_2*

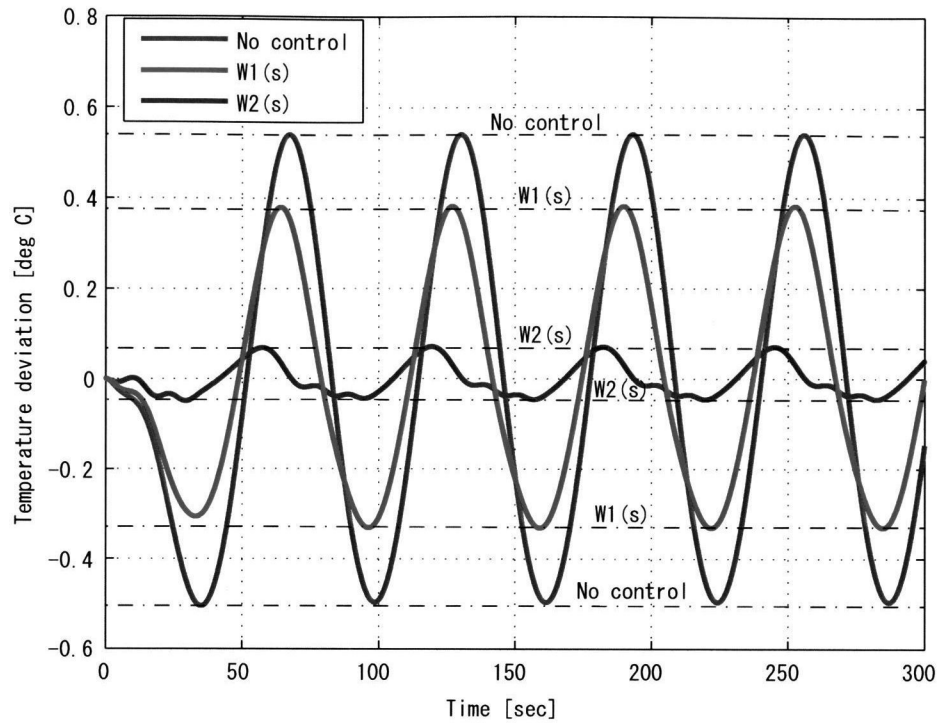


Fig. 6.24: *Simulation:* controlled temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ under H_∞ controllers and no control

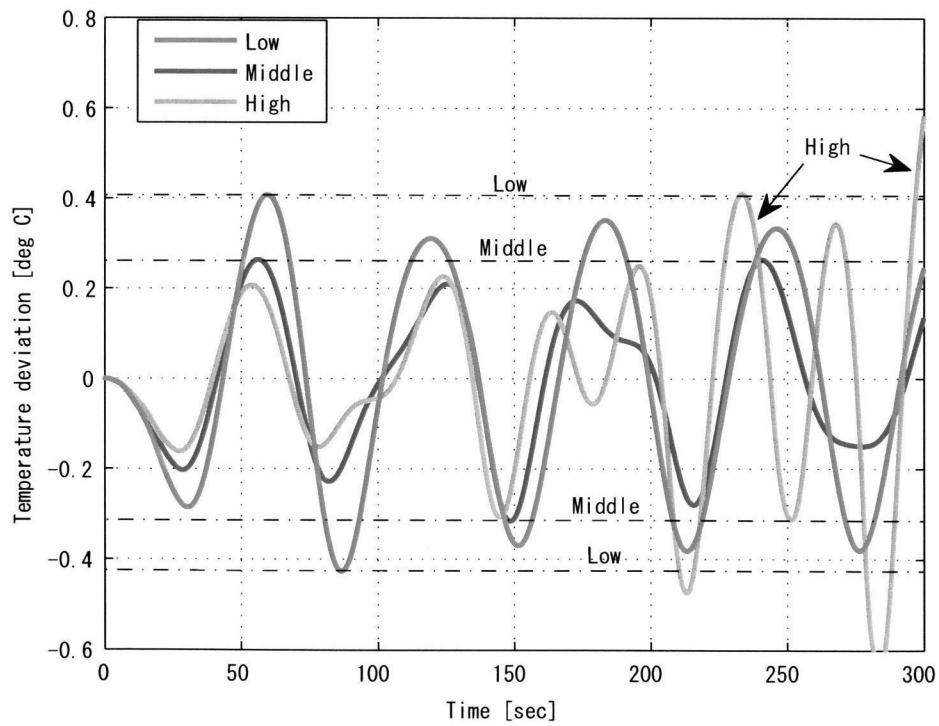


Fig. 6.25: *Simulation:* controlled temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ under PD controllers

実験結果

制御性能

• Figs. 6.26, 6.27 は Figs. 6.24, 6.25 に対応する実験結果を示している。Fig. 6.26 において、非制御下では $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ が全振幅 $0.73[^\circ\text{C}]$ の発振を行う。Fig. 6.26 において、 $(BDIO - C)$ はそれを W_1 で $0.48[^\circ\text{C}]$ に抑制している。 $X(\hat{x})$ が非常に大きくなり $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ が発散してしまったため、 W_2 での $(BDIO - C)$ の結果は示されていない。したがって、この結果は $\Delta U < 0$ が必要条件に近いことを暗に示している。Fig. 6.27 において、PD制御器は全振幅を **Middle** で $0.57[^\circ\text{C}]$ 、**High** で $0.51[^\circ\text{C}]$ に抑制できている。**Low** ゲインPD制御器はそれを $0.78[^\circ\text{C}]$ に拡大させてしまった。全ての制御器で最も効果的だったのは、 W_1 の重みを持つ $(BDIO - C)$ である。測定ノイズにD制御が激しく反応してしまうため、全てのPD制御器に対しローパスフィルタを使用した。これがシミュレーションと結果が異なる原因であると思われる。

• Figs. 6.28, 6.29 は $(BDIO - C)$ とPD制御器との入力比較を表している。これらから、 $(BDIO - C)$ はPD制御器より速応性が良く、少ない入力で効果を挙げており、かつ、入力も滑らかである事が分かる。

オブザーバ性能

• Figs. 6.30, 6.31 は非制御下・ W_1 の $(BDIO - C)$ 下において、 $l_2 = 0.55$ における内部温度を $(BDIO)$ により推定したグラフである。赤ラインが実測された内部温度、緑ラインが内部温度推定である。Fig. 6.30 において、未知外乱のみが入った場合、 $(BDIO)$ は正確に働いている事が分かる。Fig. 6.31 において、未知外乱と入力の両方が入った場合でも、 $(BDIO)$ はまずまず正確に働いている事が分かる。

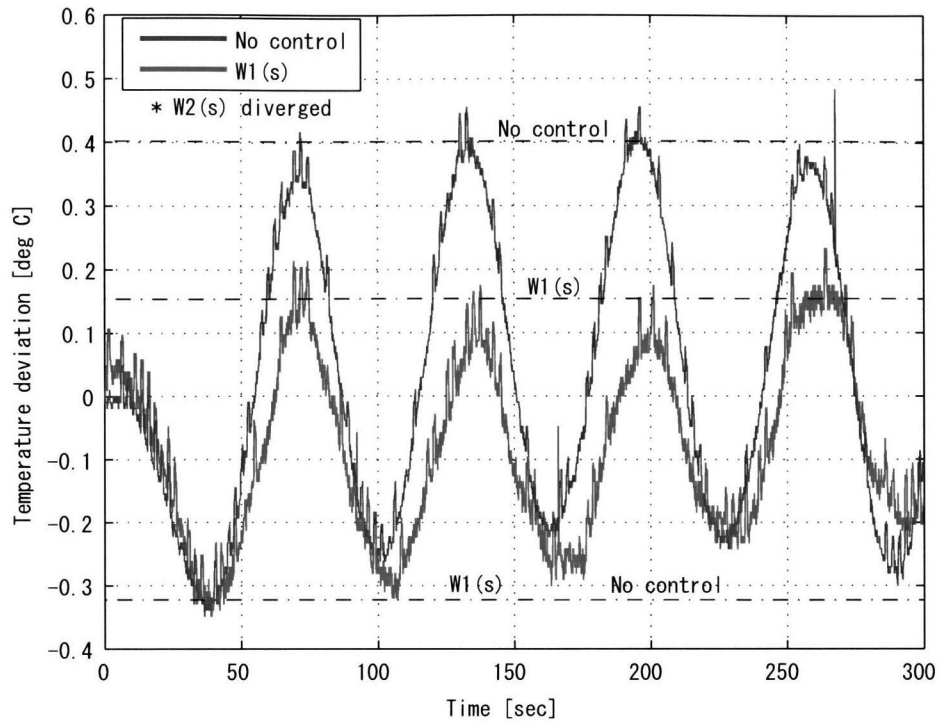


Fig. 6.26: *Experiment*: controlled temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ under H_∞ controllers and no control

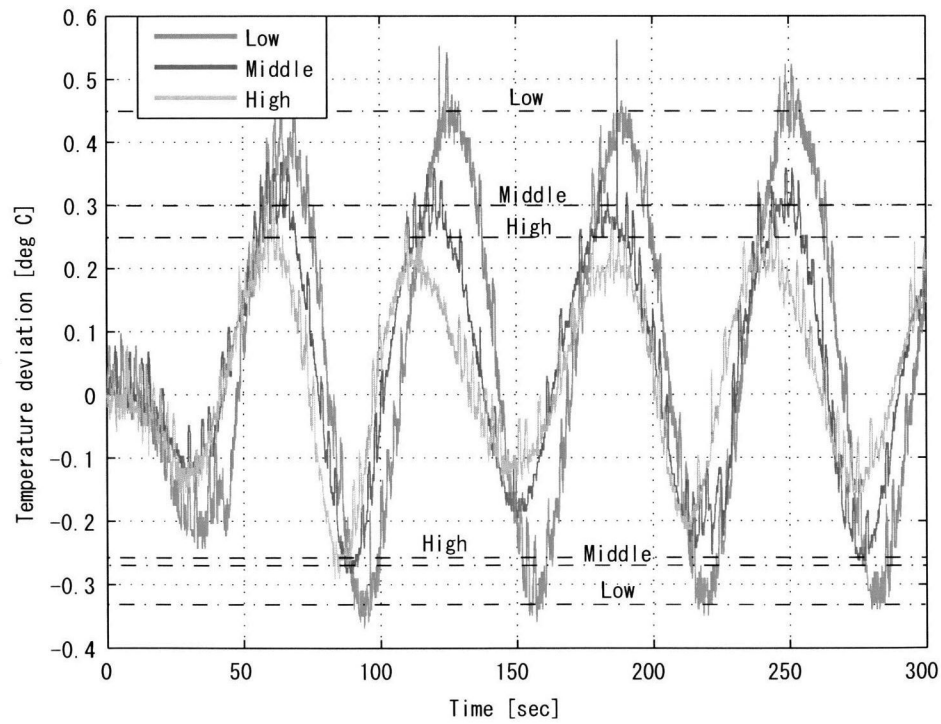


Fig. 6.27: *Experiment*: controlled temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ under PD controllers

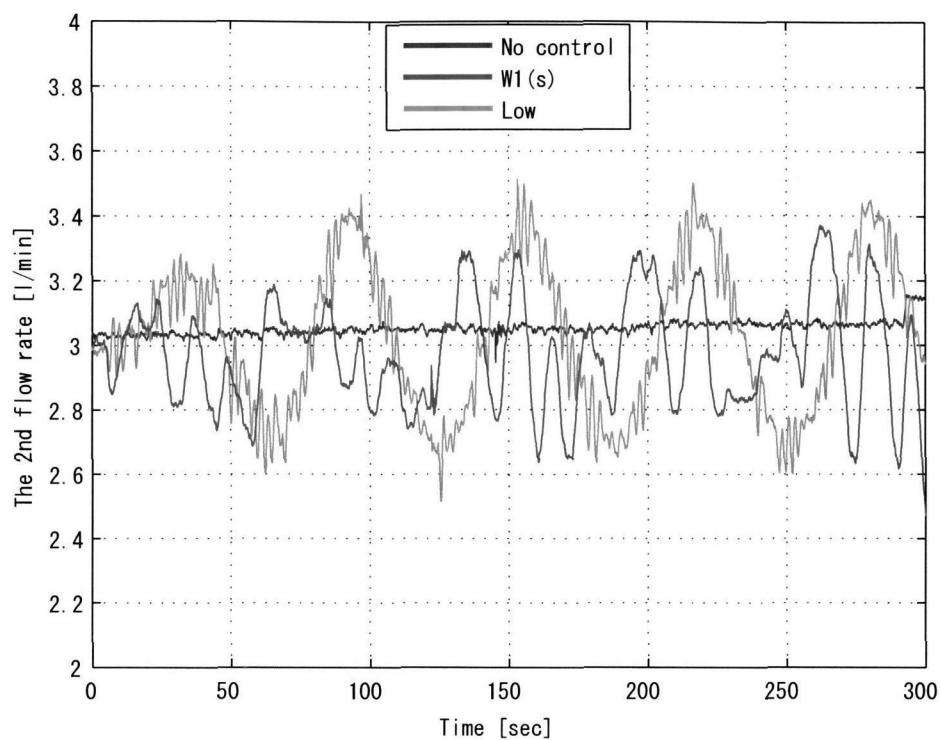


Fig. 6.28: *Experiment*: input flow rates (hot water) of no control, H_∞ controller with \mathbf{W}_1 and **Low**-gain PD controller

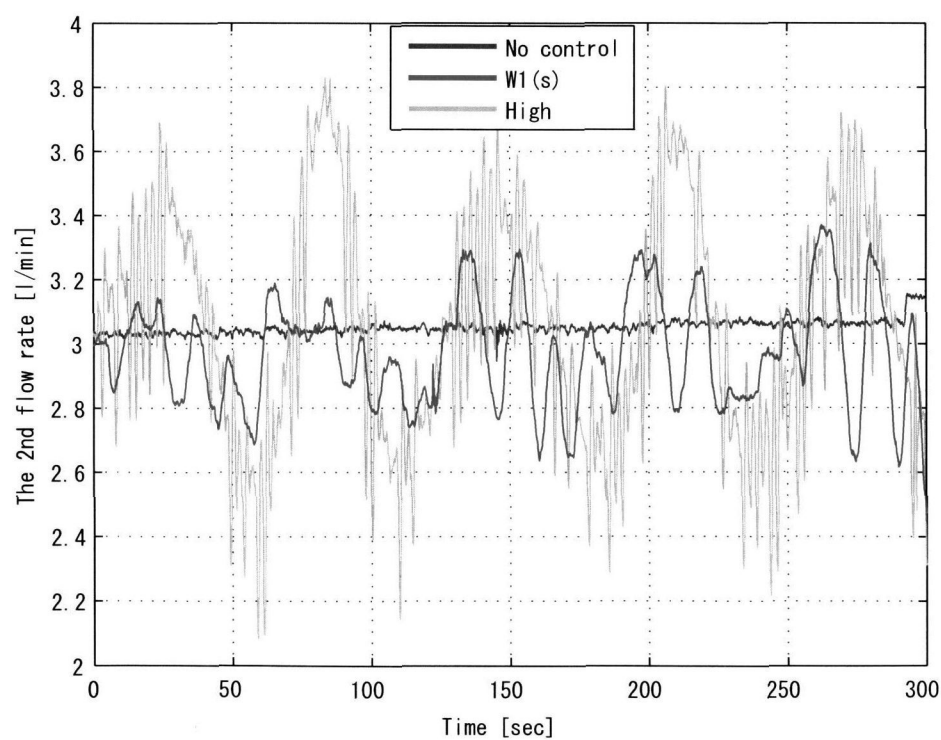


Fig. 6.29: *Experiment*: input flow rates (hot water) of no control, H_∞ controller with \mathbf{W}_1 and **High**-gain PD controller

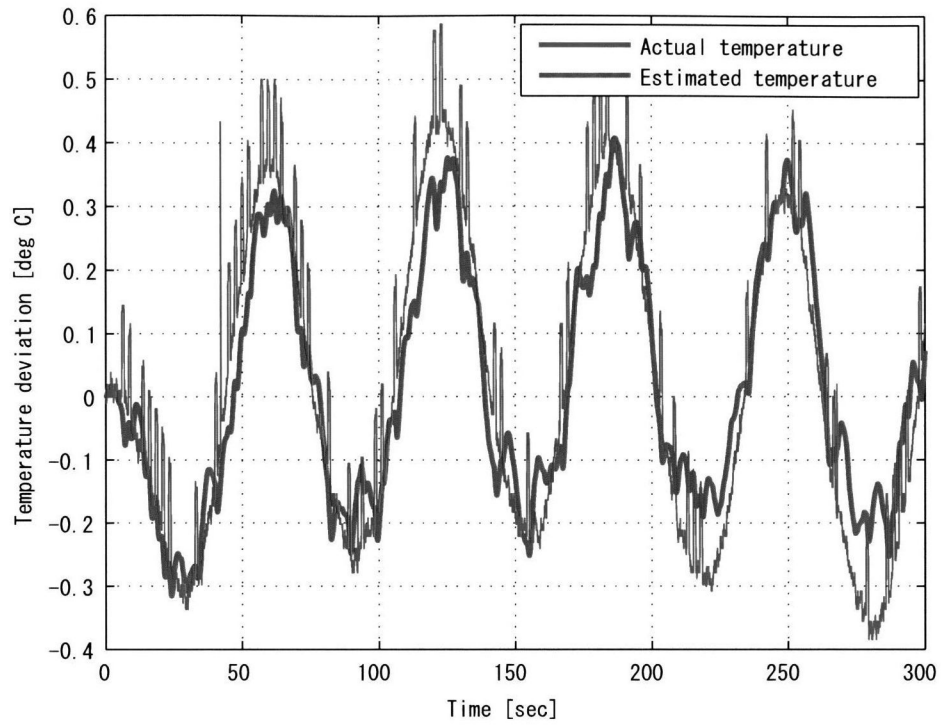


Fig. 6.30: *Experiment*: internal temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 0.55)$ under no control

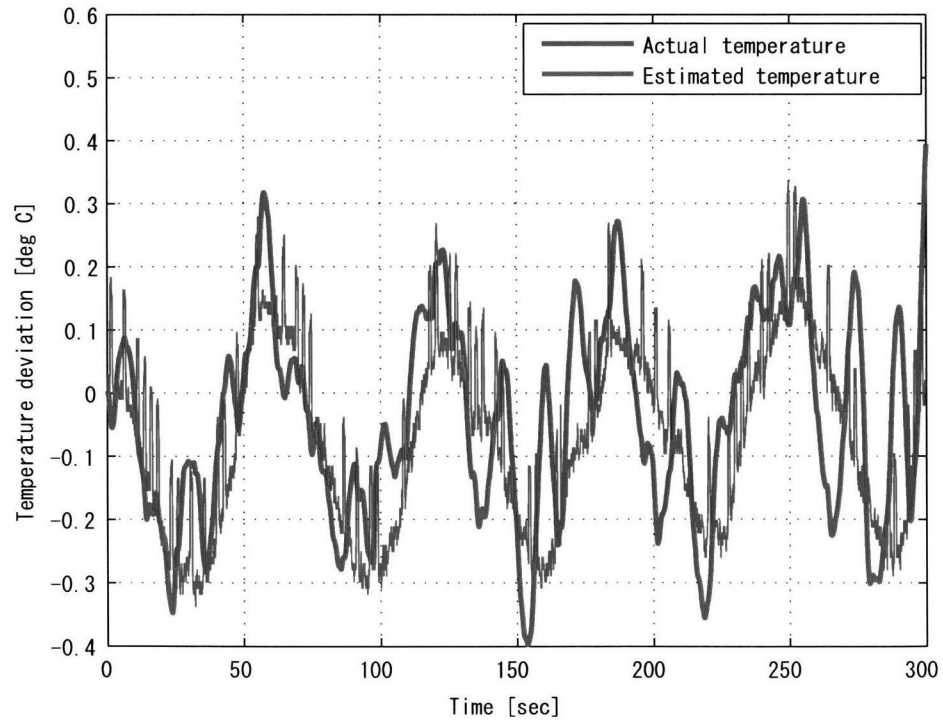


Fig. 6.31: *Experiment*: internal temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 0.55)$ under H_∞ controller with \mathbf{W}_1

6.4 線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御との比較シミュレーション

この節では、熱交換器システムを双線形系と見立てて設計した ($BDIO-C$) と、線形系と見立てて設計した線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御器 ($DIO-C$) との性能比較シミュレーションを行う。 $(DIO-C)$ では定数フィードバックゲインとなる事に注意する。

線形・双線形比較

シミュレーションは双線形系モデルで行い、実機環境・制御目的・設定パラメタ・オブザーバゲイン等は全て 6.2.1 項と同じとする。重み周波数は 6.3 節で使用した低ゲイン重み $W_1(s)$ と高ゲイン重み $W_2(s)$ を使用し、簡単な比較を行う。Figs. 6.32 - 6.43 に結果を示す。

シミュレーション結果

- 外乱には 6.2.1 項 Fig. 6.2 と同じ $\omega = -0.125\{1 - \cos(0.1\tau)\}$ を適用する。

低ゲイン重み周波数 $W_1(s)$ での比較

- Figs. 6.32, 6.33 は、外乱 Fig. 6.2 に対して加わった ($DIO-C$) と ($BDIO-C$) の入力流量をそれぞれ表している。 $(BDIO-C)$ の入力流量の振れ幅は ($DIO-C$) より若干大き目である事が分かる。
- Figs. 6.34, 6.35 は、($DIO-C$) と ($BDIO-C$) で制御された評価温度 $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ と推定温度をそれぞれ表している。0.8[°C] まで温度が振れる ($DIO-C$) より、($BDIO-C$) は温度の振れ幅を多少縮めている事が分かる。 $(DIO)(BDIO)$ の推定温度はともに正確である。
- Figs. 6.36, 6.37 は、内部温度 $\Delta\theta_2(\tau, 0.45)$ と、(DIO) と ($BDIO$) による推定温度をそれぞれ表している。推定精度は (DIO) より ($BDIO$) のほうがやや悪く見えるが、これは ($DIO-C$) より ($BDIO-C$) の入力が大きく変化しているためだと思われる。

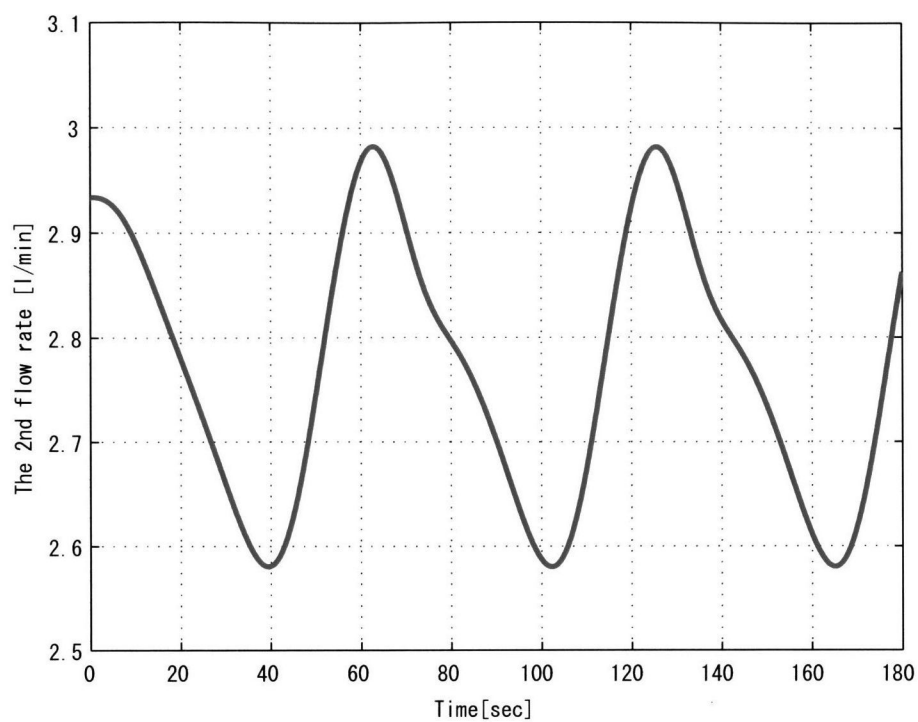


Fig. 6.32: *Simulation*: input flow rate (hot water) of $(DIO - C)$ with W_1

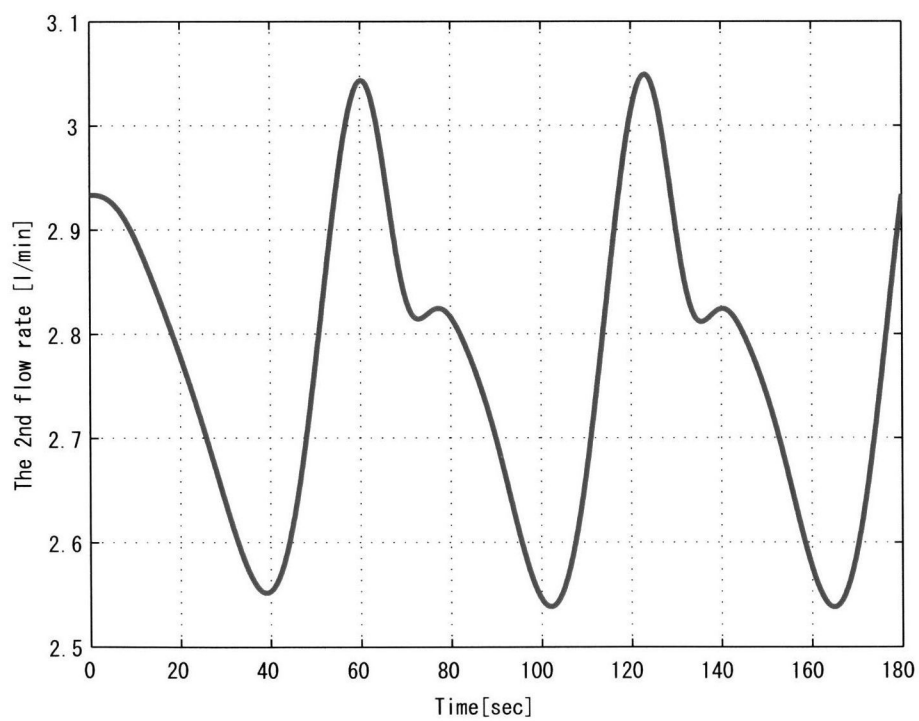


Fig. 6.33: *Simulation*: input flow rate (hot water) of $(BDIO - C)$ with W_1

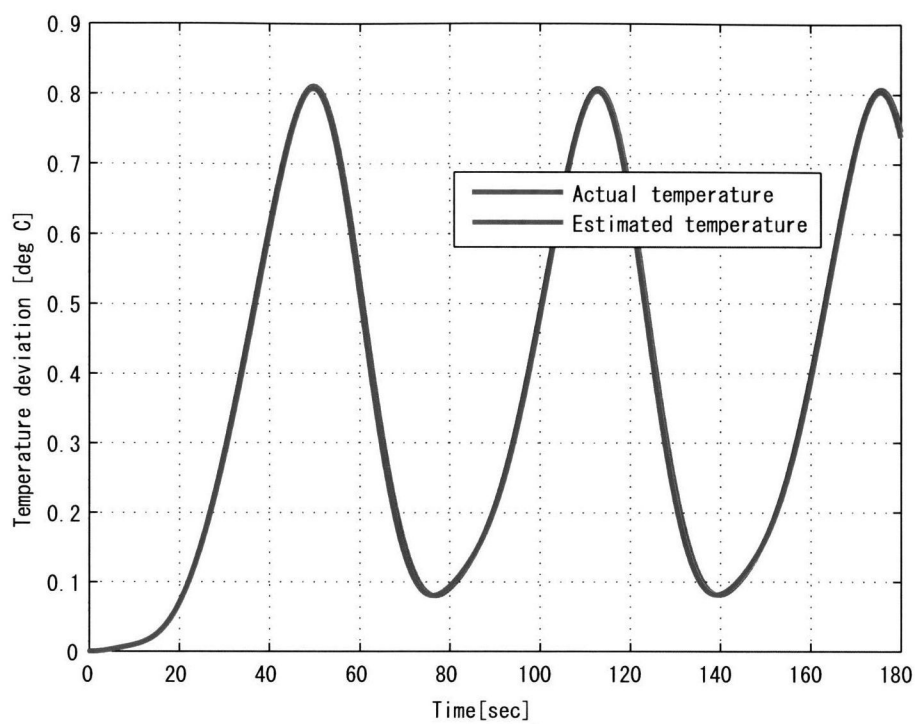


Fig. 6.34: *Simulation:* controlled temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ under $(DIO - C)$ with W_1

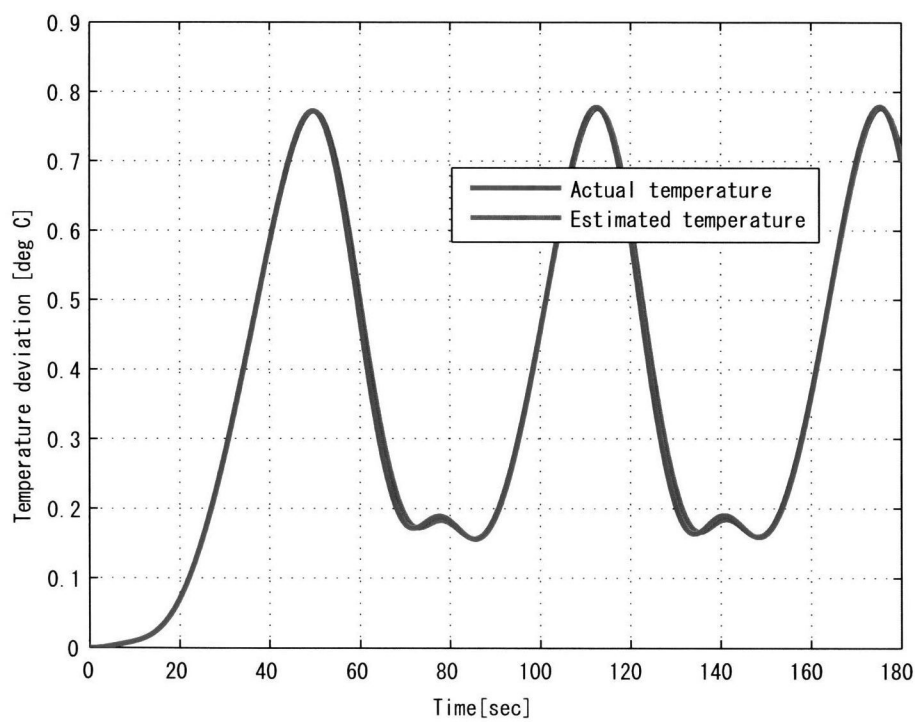


Fig. 6.35: *Simulation:* internal temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ under $(BDIO - C)$ with W_1

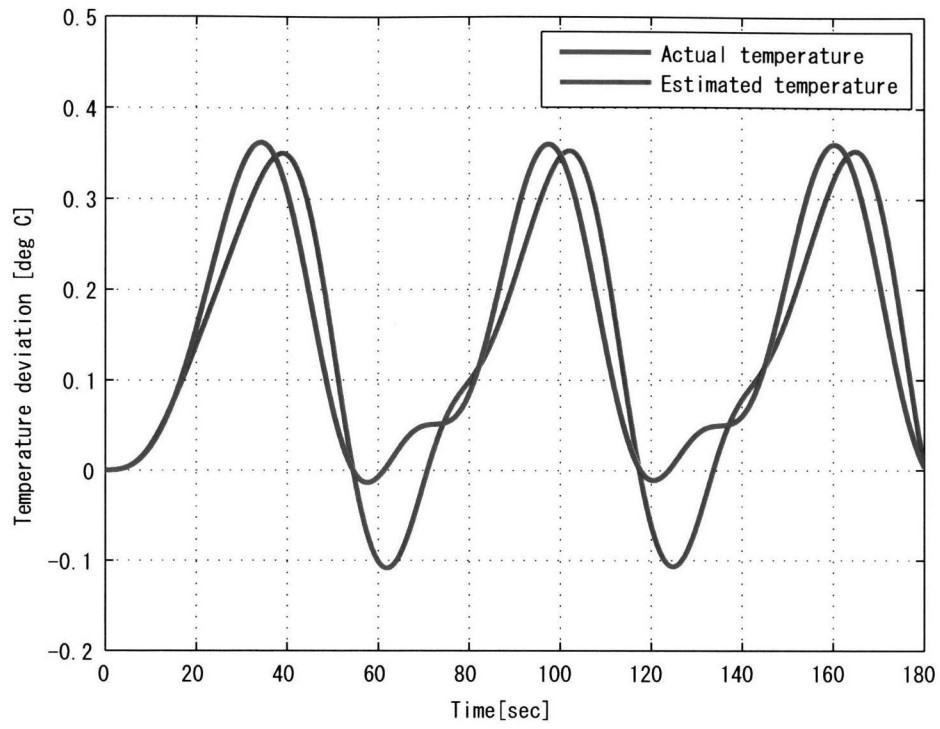


Fig. 6.36: *Simulation:* controlled temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 0.45)$ under $(DIO - C)$ with W_1

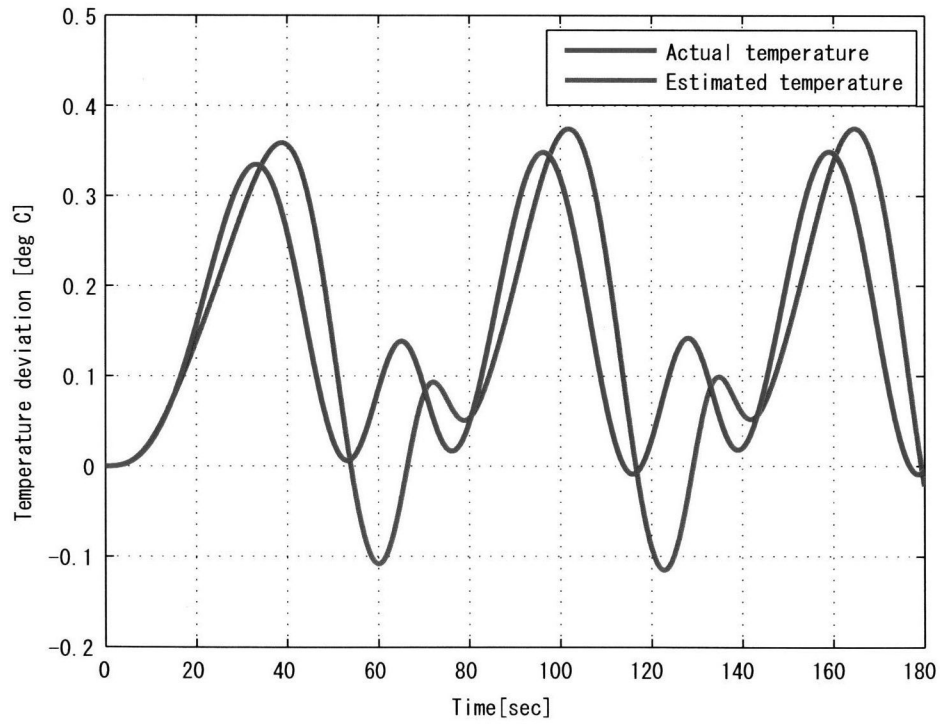


Fig. 6.37: *Simulation:* internal temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 0.45)$ under $(BDIO - C)$ with W_1

高ゲイン重み周波数 $W_2(s)$ での比較

- Figs. 6.38, 6.39 は、外乱 Fig. 6.2 に対して加わった $(DIO - C)$ と $(BDIO - C)$ の入力流量をそれぞれ表している。 $(DIO - C)$ の入力流量が大きく振動的に加わるのに対し、 $(BDIO - C)$ では振動せずに滑らかな入力流量が加わっている。
- Figs. 6.40, 6.41 は、 $(DIO - C)$ と $(BDIO - C)$ で制御された評価温度 $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ と推定温度をそれぞれ表している。 $(DIO - C)$ は制御により逆に $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ の振幅を増幅させてしまっている。それに対し $(BDIO - C)$ は安定して温度の振れ幅を縮めている事が分かる。 $(DIO)(BDIO)$ の推定温度はともにほぼ正確である。
- Figs. 6.42, 6.43 は、内部温度 $\Delta\theta_2(\tau, 0.45)$ と、 (DIO) と $(BDIO)$ による推定温度をそれぞれ表している。 $(DIO - C)$ の入力が大きく変化している分、 (DIO) の推定温度誤差は $(BDIO)$ に比べてやや大きくなっている。

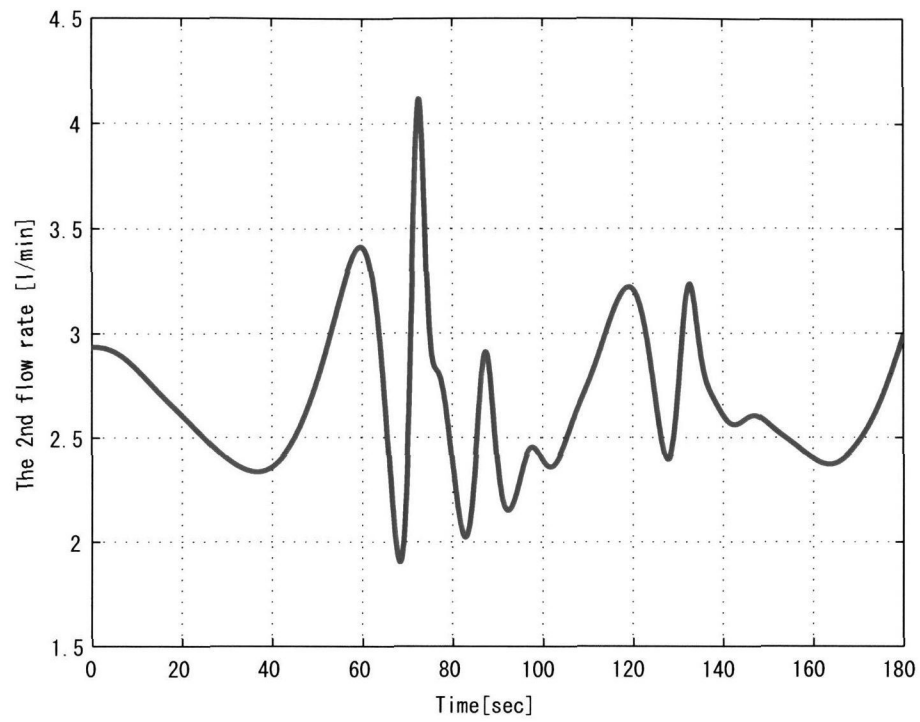


Fig. 6.38: *Simulation*: input flow rate (hot water) of $(DIO - C)$ with W_2

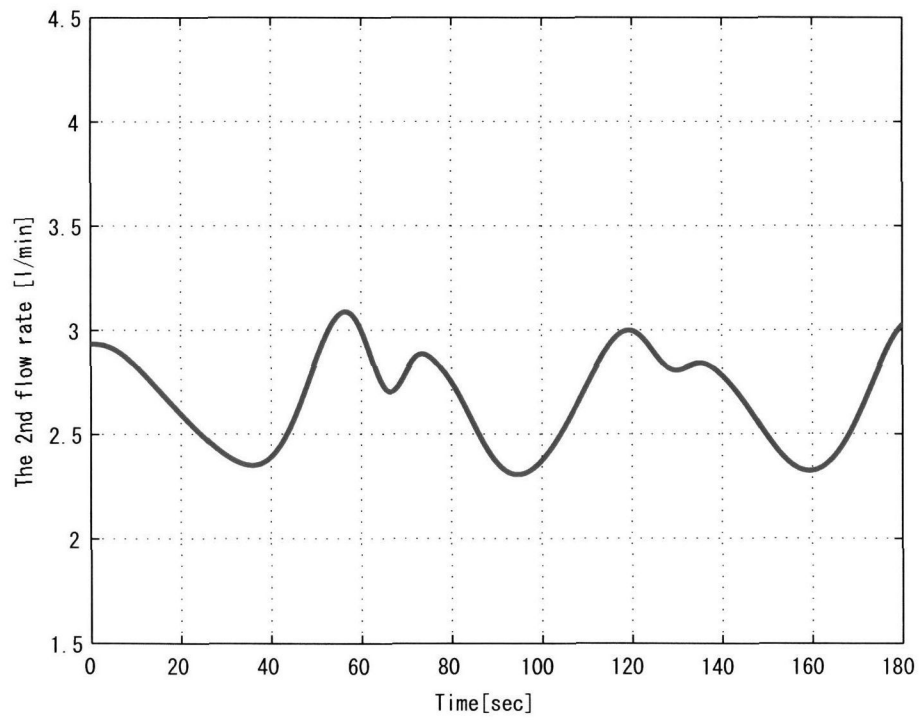


Fig. 6.39: *Simulation*: input flow rate (hot water) of $(BDIO - C)$ with W_2

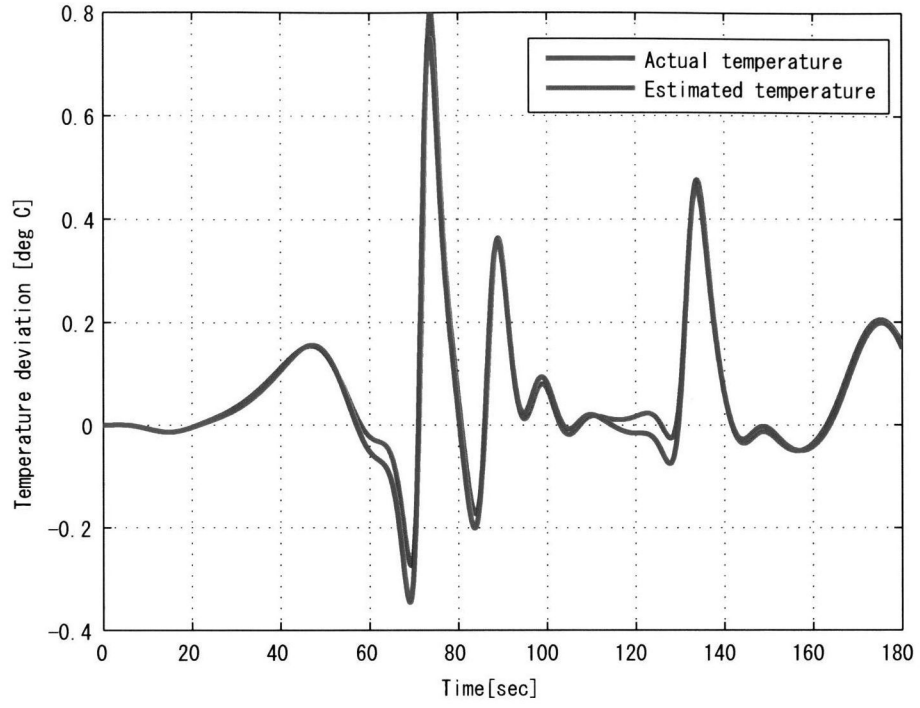


Fig. 6.40: *Simulation*: controlled temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ under $(DIO - C)$ with W_2

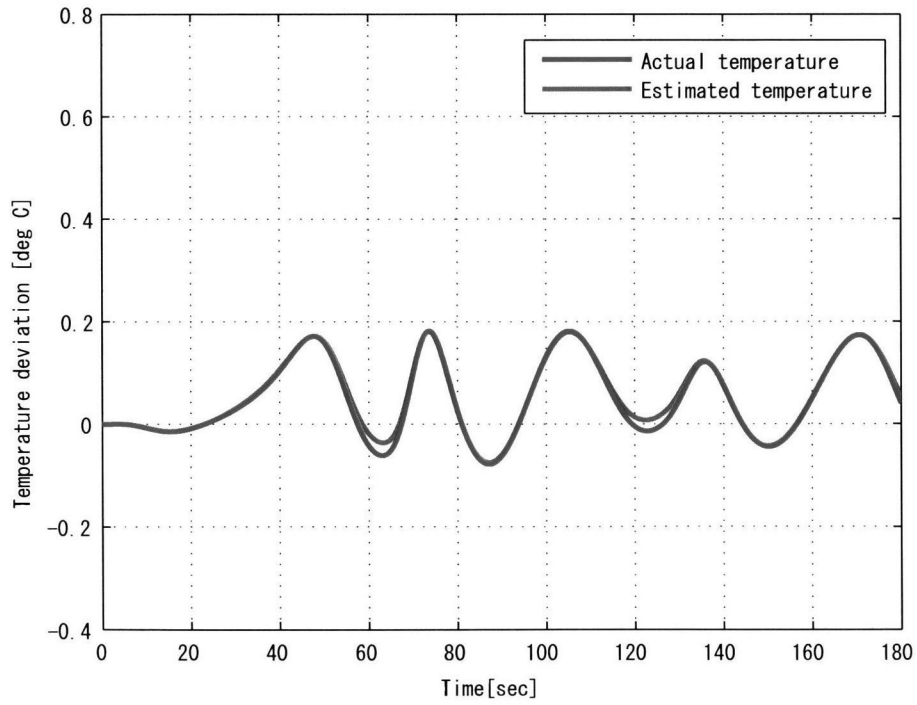


Fig. 6.41: *Simulation*: internal temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 1)$ under $(BDIO - C)$ with W_2

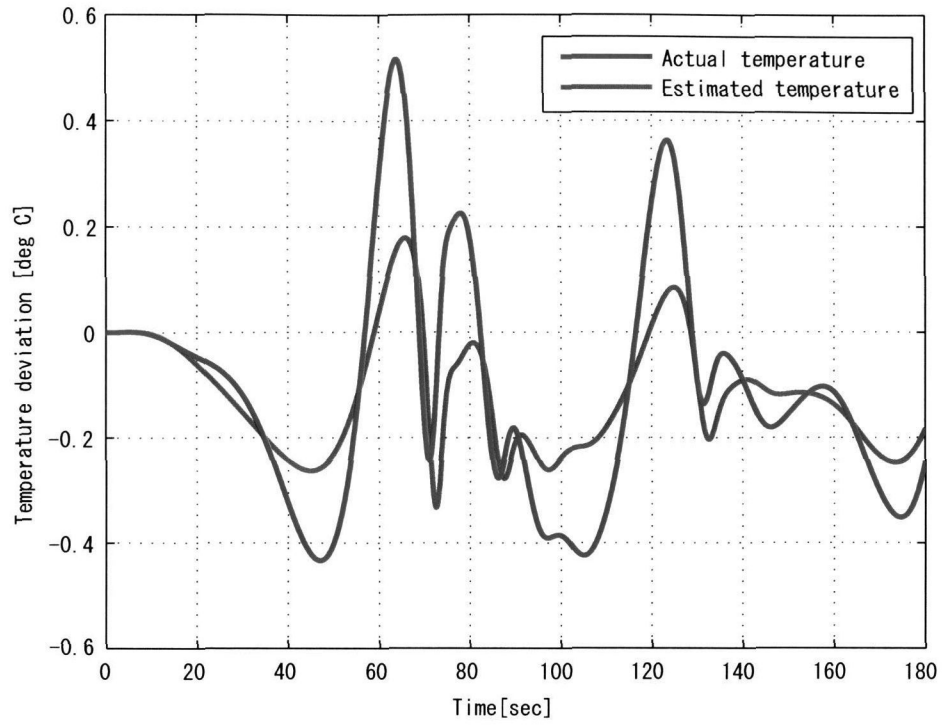


Fig. 6.42: *Simulation:* controlled temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 0.45)$ under $(DIO - C)$ with W_2

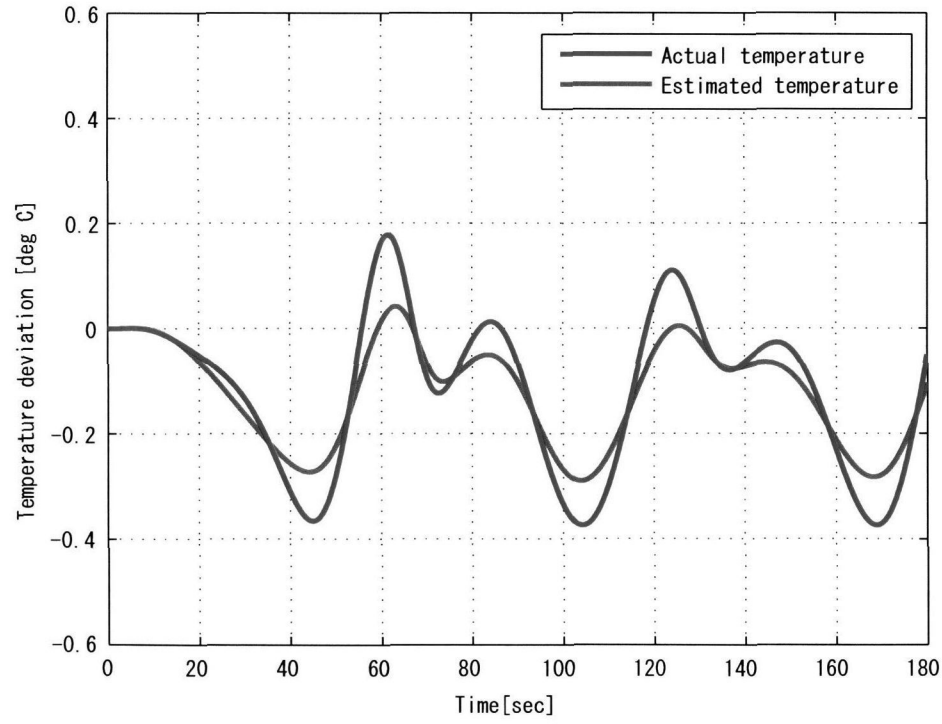


Fig. 6.43: *Simulation:* internal temperature deviation $\Delta\theta_2(\tau, 0.45)$ under $(BDIO - C)$ with W_2

6.5 考察

Fig. 6.1 の実験熱交換器に対する双線形 H_∞ 出力制御器 ($BHO-C$)・双線形全次元オブザーバ制御器 ($BFO-C$)・双線形外乱分離オブザーバ制御器 ($BPIO-C$) の性能をまとめる。

● 双線形 H_∞ 出力制御器

双線形 H_∞ 出力制御器 ($BHO-C$) は、シミュレーションにおいては、一定の制御成果を期待できる制御器であることがわかる。しかし、安定余裕がほぼ存在しない制御器である事が分かる。また、制御器 ($BHO-C$) に付随する双線形 H_∞ オブザーバ (BHO) は、推定誤差の拡張2次形式リアプノフ関数に関わる SDRE の解 Y が非常に大きく、そのオブザーバゲイン YC_y^T がかなりのハイゲインとなるため、実装誤差から生じた推定誤差を拡大し易くなっている。これらは、($BHO-C$) が、実システムにおいて発散の危険性が高い事を示している。これらの理由として、この H_∞ 出力制御器が最小最大設計（最悪ケース設計）であり、システムの限界に近い設計仕様になっている事が原因の一つとして考えられる。これを改善するには新たな「重み」要素を加えて理論をもう一度作り直し、オブザーバゲインを低ゲイン化させる必要があると思われる。

● 双線形全次元オブザーバ制御器

双線形全次元オブザーバ制御器 ($BFO-C$) の双線形全次元オブザーバ (BFO) は外乱項が全て誤差になる仕様であるため、外乱変化に対して推定誤差を生み易い。そのため、仮に推定誤差の有界性が保証されていたとしても、外乱が入った場合の推定精度はあまり良い性能が期待できない事が分かる。今回の制御性能評価において、($BFO-C$) の見かけの制御性能は良く見えたが、熱交換器システムが元々安定システムであることに起因している可能性が高いと思われる。

● 双線形外乱分離オブザーバ制御器

双線形外乱分離オブザーバ制御器 ($BPIO-C$) は、提案した3つの制御器の中で制御性能・オブザーバ性能ともに最も良い成果を上げている。また、実システムにも成果を期待できる制御器であることが分かる。双線形全次元オブザーバ (BFO) と比較しても双線形外乱分離オブザーバ ($BPIO$) は外乱を陽に考慮した設計になっており、線形外乱項を推定誤差から分離出来るため、双線形外乱が入った場合も推定状態は比較的信用が高くなっている。これらは、外乱影響抑制を考えた H_∞ 制御において、「外乱を陽に考慮したオブザーバ」と「 H_∞ 状態フィードバック制御器」を併用した制御器が、オブザーバの正確性の上でも優れており、制御性能の上でも評価し易いため、本質的に理にか

なった設計になっているからだと思われる。しかし、誤差の有界条件から、オブザーバは不安定要素もわずかながら含んでいるようであり、大きなセンサノイズやパラメータ同定誤差などの実装誤差が大きい場合は、発散の危険性もわずかに含まれている事が分かる。線形制御との比較であるが、低ゲイン重みにおいて、わずかながら双線形制御のほうが良い制御性能を示した。高ゲインの重みでは双線形制御は線形制御より安定している事がわかる。パラメタ誤差が少ない実システムにおいて、より高い成果を追求した場合、双線形制御は有効であることが分かる。ここで、非線形制御の特徴として「原点に近くなるほど線形制御と性能が同じになる」という現象を考える [17][19]。非線形 H_∞ 制御は原点に収束させる制御であるため、性能が良いほど線形制御と同じになるというジレンマが本来ある筈である。多少その傾向はみられるものの、重みをハイゲインにさせた場合、違いはやや顕著に見られた。他に、原点近傍外での制御性能において線形制御を上回ると予想されるため、ステップ外乱などにも線形制御との差異が出ると思われる。しかし H_∞ 制御は \mathcal{L}_2 ノルム下で0に収束する外乱を仮定しているため、ステップ外乱は本来不向きであり、積分 (I) 制御に性能が劣ってしまう事が考えられる。

- 全体として

従来の SDRE 法では安定性における議論が難しかったが、定理における $\Delta U < 0$ や $\Delta Y < 0$ を考慮すれば閉ループ安定性や有界性の議論が容易に行え、実システムにおいても発散し易いかどうか予測可能であることを示している。

第7章 結論

本論文では、双線形入力項および双線形外乱項を持つ双線形システムに対し、双線形 H_∞ 出力フィードバック制御と双線形オブザーバ H_∞ 制御について考察した。その際、双線形オブザーバとして双線形全次元オブザーバと双線形外乱分離オブザーバの2種類を提案した。これらの双線形 H_∞ 制御器と双線形オブザーバに対し、拡張2次形式リアプノフ関数に基づいたSDRE法を適用して、(1) 双線形 H_∞ 出力フィードバック制御の内部安定性とロバスト性、(2) 双線形全次元オブザーバと双線形外乱分離オブザーバの推定誤差の有界性、(3) 双線形オブザーバ H_∞ 制御の内部安定性とロバスト性、に対する十分条件を明らかにした。

提案した制御器・オブザーバの性能を評価するために、重み付き残差法を用いて集中系に近似した分布系熱交換器モデル、すなわち、(a) 動的システムが双線形入力項と双線形外乱項を持つ双線形システムとしてモデル化される、(b) 状態ベクトルは物理量を持たない一般化フーリエ係数で構成されるため、状態ベクトルを直接観測することができない、(c) 熱交換器の構造上の理由から、入口・出口もしくは幾つかのポイントでしか温度を計測する事が出来ないため、内部分布温度を知るためには適切な推定器に頼らなければならない、という特徴を持つ双線形システムに対し、提案した制御器とオブザーバを適用し、シミュレーションと実機実験によって、その実システムへの適用可能性と有効性を示した。

まず、シミュレーションによって3制御器、双線形 H_∞ 出力フィードバック制御器 ($BHO-C$)、双線形全次元オブザーバ H_∞ 制御器 ($BFO-C$)、双線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御器 ($BDIO-C$) の制御性能を検討し、未知双線形外乱流量により生じた温度偏差が、低ゲイン重み関数に対しては ($BDIO-C$) が一番小さく、次いで ($BFO-C$)、($BHO-C$) となり、高ゲイン重み関数に対しては ($BDIO-C$) が一番小さく、次いで ($BHO-C$)、($BFO-C$) となることを示した。その際、($BHO-C$) では全ての重みで安定条件を満たさず、($BFO-C$)($BDIO-C$) では低ゲインの重みでは安定条件を

満たす事を示した。

次に、シミュレーションと実験により、 $(BHO-C)(BFO-C)(BDIO-C)$ の制御器に付随する3つのオブザーバ、双線形 H_∞ オブザーバ (BHO) 、双線形全次元オブザーバ (BFO) 、双線形外乱分離オブザーバ $(BDIO)$ の推定精度を検討した。シミュレーションでは $(BDIO)$ のオブザーバの推定精度が一番良く、次いで (BFO) 、 (BHO) となることを示した。この時、 $(BHO)(BFO)$ の推定誤差は外乱の変動分だけ増減し、 $(BDIO)$ はそれをほぼ低減させていることを示した。また、 (BHO) のオブザーバゲインはかなり大きな値になっており、実機実装への危険性が高いことを提示した。これに対し、提案した $(BFO)(BDIO)$ のオブザーバは、 (BFO) は有界条件を全て満たし、 $(BDIO)$ もまずまず満たす事を明らかにした。実験においても、 $(BDIO)$ のオブザーバの推定精度が一番良く、次いで (BFO) 、 (BHO) となることを示した。 (BHO) は出口温度推定・内部温度推定ともかなり不正確であり、実環境における実装誤差が推定誤差に極めて大きく影響するオブザーバであることが示された。 (BFO) は出口温度推定はまずまず良い結果を示したが、内部温度に関しては殆ど推定出来ておらず、推定誤差は有界に納まるが、外乱が加わった時の推定精度は低い事を示した。 $(BDIO)$ の推定出口温度は実温度とほぼ一致しており、入力と外乱が混在した環境下でも内部温度をかなり正確に推定できることが示された。

次に、双線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御器 $(BDIO-C)$ による制御実験を PD 制御実験と比較して行った。その際、PD 制御器に対しては、低、中、高ゲインの3種類のゲインを、また、 H_∞ 制御器に対しては、高、低の2種類の重み関数を用いた。その結果、低ゲインの双線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御器に対して (A) 高ゲインの PD 制御器よりも良い制御性能を示し、入力も小さく滑らかになること、(B) 制御中の内部温度もかなり正確に推定できること、(C) 提案した安定条件は、必要条件に近い十分条件であると考えられること、を示した。

最後に、双線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御器と線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御器との比較のためにシミュレーションを行い、低ゲインの場合には性能に差は少ないが、高ゲインの場合には双線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御器が線形外乱分離オブザーバ H_∞ 制御器より安定した制御性能を与えることを示した。

本研究の課題は、定理 3.1, 3.2, 4.1, 4.2 において、安定性に関わる ΔY , ΔU が実システムにおいて計測できない x , \bar{x} , \bar{x}_2 を含むため、定理に基づき直接オブザーバ設計とコントローラ設計が出来

ないため、実システムでの安定性は予測に留まってしまう、ということである。しかし、従来議論が困難であった SDRE 法に基づく双線形オブザーバ H_∞ 制御器の閉ループ安定定理を示し、実システムにおいて検証し、その方向性を示した数少ない論文であると思われる。

付 録 A 非線形外乱システムの収束条件

[9][10][23][26]などで引用・間接引用されている Wolfgang Hahn の文献 [70] の定理 68.2 は、次のシステムに対する漸近安定を議論している。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\omega}(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{o} \quad (\text{A.1})$$

しかし、この定理は外乱と状態量の双線形項を持つ双線形システムに適用することはできない。よって、この付録にて定理を一般化する。

まず、以下の微分方程式を考える。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\omega}(t)), \quad t \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

上式において、 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_0$, $\mathbf{f}(\mathbf{o}, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$ であり、 $\boldsymbol{\omega}(t)$ は $t \geq 0$ かつ $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{o}$ において $\|\boldsymbol{\omega}(t)\| \leq \rho$ となる連続で有界なベクトル値関数である。ここで、以下を仮定する。

仮定 A.1 次のようなスカラー関数 $V(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_1$ が存在したとする。

1. $\forall \mathbf{x}$ において $V(\mathbf{x}) \geq 0$ であり、 $V(\mathbf{x}) = 0$ とき $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ である。
2. $\forall \mathbf{x}$ において $\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{o}) \leq 0$ であり、 $\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{o}) = 0$ とき $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ である。
3. 軌跡 $\{\mathbf{x}(t) : 0 \leq t < \infty\}$ は、 $\|\boldsymbol{\omega}\| \leq \rho$ となる $\forall \boldsymbol{\omega}$ に対し、原点を含む閉集合 \mathcal{A} に留まる。ここで、

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathcal{C}_0 \quad (\text{A.3})$$

である。

□

定理 A.1 システム (A.2) の状態量 \mathbf{x} は、仮定 A.1 の下で原点に収束する。 \square

証明 ケース (I): もし $\forall t \geq t_a$ に対し $\dot{V}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\omega}(t)) < 0$ となる時間 $t_a \geq 0$ が存在するとき、 $V(\mathbf{x}(t))$ は仮定 A.1.1 より非負であるため、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\omega}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(\mathbf{x}(t), \mathbf{o}) = 0$ となる。これは仮定 A.1.2 より $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$ を意味する。

ケース (II): もし $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ かつ $\dot{V}(\mathbf{x}(t_n), \boldsymbol{\omega}(t_n)) \geq 0$ となる無限時間配列 $\{t_n\}$ が存在するとき、連続関数はコンパクト集合において有界のため、仮定 A.1.3 と (A.3) より、有限となる正の数 b に対して $\dot{V}(\mathbf{x}(t_n), \boldsymbol{\omega}(t_n)) \in [0, b]$ は満たされる。これは $[0, b]$ で $\{\dot{V}(\mathbf{x}(t_n), \boldsymbol{\omega}(t_n))\}$ の集積点が存在することを意味する。任意の集積点 c に対し、 $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$ かつ $c = \lim_{i \rightarrow \infty} \dot{V}(\mathbf{x}(t_i), \boldsymbol{\omega}(t_i))$ となる $\{t_n\}$ から、無限時間配列 $\{t_i\}$ を選ぶ事が出来る。このとき、仮定 A.1.2 が $c \leq 0$ を意味する一方で、定義より $c \geq 0$ となる。すなわち、 $c = 0$ を得る。これは十分大きな t に対して $\dot{V}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\omega}(t)) \leq 0$ となり、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$ となる事を暗に意味している。 \blacksquare

付 録 B 熱交換器の定式化

この章では、並流型熱交換器の基礎方程式を熱収支式から導き、重み付き残差法より定常状態周りの双線形システム ($\mathcal{H}\mathcal{E}\mathcal{X}$) を導出する。*

B.1 記号と添字

次頁に本章で使用する記号と添字を Table B.1 と Table B.2 に示す。

B.2 熱収支式による定式化

仮定 B.1 熱収支式を立てるために、以下を仮定する。

1. 流体の温度、流速、壁の温度は断面内で均一である。
2. 壁、流体内での軸方向の熱拡散は無視する。
3. 熱伝達率は位置にも時間にも依存しない。
4. 流体は非圧縮性である。
5. 壁、流体の物性量は一定である。

□

このような仮定をたてると、熱力学の第一法則の外部に対する仕事 (圧力×体積の増加) などが無視できるようになり、熱交換を行う物体間で純粋なエネルギー交換が行われることになる。

ここで、Fig.B.1 のような熱交換器の基礎モデルにおいて、流体の熱収支式を求める。仮定 B.1 と

*明治大学名誉教授 嘉納秀明氏の輪講テキスト「熱交換器のモデリングと制御」を参考としている。

Table B.1: Units and symbols

Symbol	Meaning	Unit
τ	Time	[s]
ξ	Distance	[m]
$\theta(\tau, \xi)$	Temperature	[K]
v	Fluid velocity	[m/s]
ρ	Density	[kg/m ³]
Q	Migration energy	[kJ]
C	Specific heat coefficient	[kJ/kg · K]
α	Heat transfer coefficient	[kJ/m ² · s · K]
k	Overall heat transfer coefficient	[kJ/m ² · s · K]
m	Proportional rate of flow rate to heat transfer	[kJ/m ⁵ · K]
L	Length of heat exchange	[m]
A	Area of heat exchange	[m ²]
S	Area of cross section	[m ²]
$T = L/v$	Transit time	[s]
$r = T_1/T_2$	Ratio of fluid velocity	[d.l.]
$t = \tau/T_2$	Dimensionless time	[d.l.]
$l = \xi/L$	Dimensionless distance	[d.l.]
ω	1st fluid velocity change (disturbance)	[d.l.]
u	2nd fluid velocity change (input)	[d.l.]
$\frac{\alpha AT}{C\rho SL}$	Dimensionless coefficient	[d.l.]

Table B.2: Subscripts

Subscript	Meaning	Subscript	Meaning
1	1st fluid	i	inlet
2	2nd fluid	f	fluid
s	steady state	w	wall

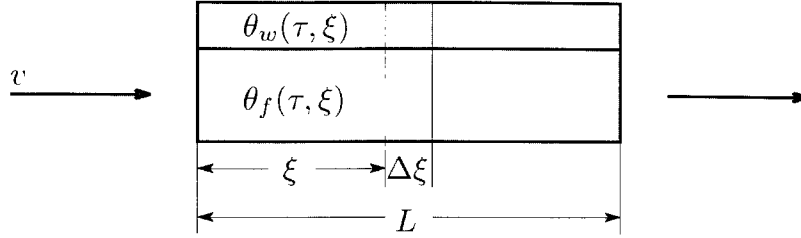


Fig. B.1: Basic model of heat exchanger

熱力学の第一法則に基づき、流体が壁からもらうエネルギー式、壁が流体に与えるエネルギー式、を求める。

- 区間 $(\xi, \xi + \Delta\xi)$ に時間 $\Delta\tau$ で流体に流入するエネルギー (比熱 \times 質量 \times 温度変化)

$$\Delta Q = C_f \rho_f S_f \Delta\xi \Delta\theta_f \quad (\text{B.1})$$

ここで、 Q : 移動エネルギー [kJ]、 C_f : 流体の比熱 [kJ/kg \cdot K]、 ρ_f : 流体密度 [kg/m³]、 S_f : 流路断面積 [m²]、である。

- 区間 $(\xi, \xi + \Delta\xi)$ に時間 $\Delta\tau$ で壁を通して流体から流出するエネルギー
(熱伝達率 \times 熱交換面積 $\{\Delta\xi$ 分 $\} \times$ 温度差 \times 微小時間)

$$\Delta Q = \alpha A \frac{\Delta\xi}{L} (\theta_w - \theta_f) \Delta\tau \quad (\text{B.2})$$

ここで、 α : 壁と流体との熱伝達率 [kJ/m² \cdot s \cdot K]、 A : 壁と流体との全熱交換面積 [m²]、 L : 熱交換器全長 [m]、である。

流入と流出のエネルギーが等しいことから、 $\lim \Delta\tau \rightarrow 0$ において以下が成り立つ

$$C_f \rho_f S_f \frac{d\theta_f}{d\tau} = \frac{\alpha A}{L} (\theta_w - \theta_f) \quad (\text{B.3})$$

ここで $d\theta_f/d\tau$ は全微分であり、流速 $v = d\xi/d\tau$ として以下のように表せる。

$$\frac{d\theta_f(\tau, \xi)}{d\tau} = \frac{\partial \theta_f(\tau, \xi)}{\partial \tau} + v \frac{\partial \theta_f(\tau, \xi)}{\partial \xi} \quad (\text{B.4})$$

(B.3) と (B.4) より、以下のような流体の熱収支式が求まる。

$$\frac{\partial \theta_f(\tau, \xi)}{\partial \tau} + v \frac{\partial \theta_f(\tau, \xi)}{\partial \xi} = \frac{\alpha A}{C_f \rho_f S_f L} (\theta_w(\tau, \xi) - \theta_f(\tau, \xi)) \quad (\text{B.5})$$

上式は距離と時間に分布した分布定数系となっている。また、温度と流速の積が存在するため、流速が変化する時、双線形系となる事に注意する。

B.3 並流型熱交換器の基礎式

Fig.B.2 のような並流型熱交換器に、前節で求めた熱収支式を適用すると以下のような方程式が得られる。

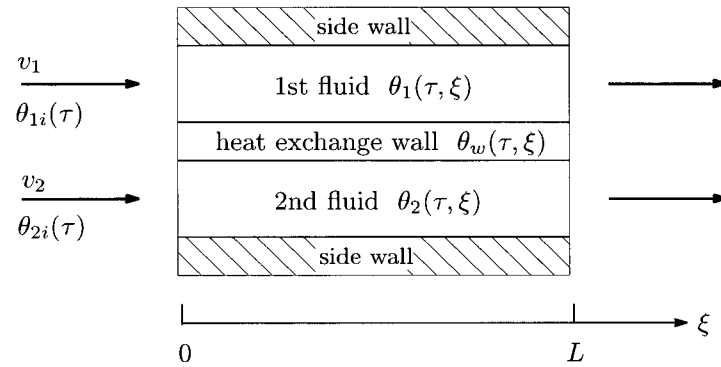


Fig. B.2: Parallel flow heat exchanger

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_1(\tau, \xi)}{\partial \tau} + v_1 \frac{\partial \theta_1(\tau, \xi)}{\partial \xi} = a_1(\theta_w(\tau, \xi) - \theta_1(\tau, \xi)), \quad \theta_1(\tau, 0) = \theta_{1i}(\tau) \\ \frac{\partial \theta_2(\tau, \xi)}{\partial \tau} + v_2 \frac{\partial \theta_2(\tau, \xi)}{\partial \xi} = a_2(\theta_w(\tau, \xi) - \theta_2(\tau, \xi)), \quad \theta_2(\tau, 0) = \theta_{2i}(\tau) \\ \frac{\partial \theta_w(\tau, \xi)}{\partial \tau} = b_1(\theta_1(\tau, \xi) - \theta_w(\tau, \xi)) + b_2(\theta_2(\tau, \xi) - \theta_w(\tau, \xi)) \\ a_1 = \frac{\alpha_1 A_1}{C_{f1} \rho_{f1} S_{f1} L}, \quad a_2 = \frac{\alpha_2 A_2}{C_{f2} \rho_{f2} S_{f2} L}, \quad b_1 = \frac{\alpha_1 A_1}{C_w \rho_w S_w L}, \quad b_2 = \frac{\alpha_2 A_2}{C_w \rho_w S_w L} \end{array} \right. \quad (\text{B.6})$$

ここで、 α_1 : 壁と第一流体との熱伝達率 [$\text{kJ}/\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K}$]、 A_1 : 壁と第一流体との熱交換面積 [m^2]、 α_2 : 壁と第二流体との熱伝達率 [$\text{kJ}/\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K}$]、 A_2 : 壁と第二流体との熱交換面積 [m^2]、である。

熱交換壁が薄い場合

熱交換壁が非常に薄い場合、特異摂動法により壁のダイナミクスを無視できる。(B.6)において $S_w = \epsilon D_w$ と表す事が出来る。ここで、 ϵ は熱交換壁の厚さ、 D_w は熱交換壁の周囲長さである。このとき (B.6) の壁の熱収支式は

$$\epsilon \frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} = \frac{\alpha_1 A_1}{C_w \rho_w D_w L} (\theta_1 - \theta_w) + \frac{\alpha_2 A_2}{C_w \rho_w D_w L} (\theta_2 - \theta_w) \quad (\text{B.7})$$

となるため、

$$0 = \frac{\alpha_1 A_1}{C_w \rho_w D_w L} (\theta_1 - \theta_w) + \frac{\alpha_2 A_2}{C_w \rho_w D_w L} (\theta_2 - \theta_w), \quad \text{or} \quad \theta_w = \frac{\alpha_1 A_1 \theta_1 + \alpha_2 A_2 \theta_2}{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2} \quad (\text{B.8})$$

となる。この θ_w を (B.6) に代入すると、熱交換壁が薄い場合の並流型熱交換器の熱収支式が以下のようになれる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_1(\tau, \xi)}{\partial \tau} + v_1 \frac{\partial \theta_1(\tau, \xi)}{\partial \xi} = a_1 (\theta_2(\tau, \xi) - \theta_1(\tau, \xi)), \quad \theta_1(\tau, 0) = \theta_{1i}(\tau) \\ \frac{\partial \theta_2(\tau, \xi)}{\partial \tau} + v_2 \frac{\partial \theta_2(\tau, \xi)}{\partial \xi} = a_2 (\theta_1(\tau, \xi) - \theta_2(\tau, \xi)), \quad \theta_2(\tau, 0) = \theta_{2i}(\tau) \\ a_1 = \frac{kA}{C_{f1} \rho_{f1} S_{f1} L}, \quad a_2 = \frac{kA}{C_{f2} \rho_{f2} S_{f2} L}, \quad kA = \frac{\alpha_1 A_1 \alpha_2 A_2}{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2} \end{array} \right. \quad (\text{B.9})$$

距離の正規化

無次元化距離を $l = \xi/L$ と定めて (B.9) に適用すると、 $0 \leq l \leq 1$ に正規化された以下の式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_1(\tau, l)}{\partial \tau} + \frac{v_1}{L} \frac{\partial \theta_1(\tau, l)}{\partial l} = a_1 (\theta_2(\tau, l) - \theta_1(\tau, l)), \quad \theta_1(\tau, 0) = \theta_{1i}(\tau) \\ \frac{\partial \theta_2(\tau, l)}{\partial \tau} + \frac{v_2}{L} \frac{\partial \theta_2(\tau, l)}{\partial l} = a_2 (\theta_1(\tau, l) - \theta_2(\tau, l)), \quad \theta_2(\tau, 0) = \theta_{2i}(\tau) \end{array} \right. \quad (\text{B.10})$$

B.4 流速が変化する場合

ここでは前節で求めた並流型熱交換器の基礎式において、流速が時間により変化する場合を考える。まず初めに、 v が $v(\tau)$ となった (B.10) に対して、時間の正規化を行う。

時間の正規化

第二流体において任意の定常流速 v_{2s} を定め、それが熱交換器管を通り抜ける時間を $T_2 = L/v_{2s}$ とする。無次元化時間を $t = \tau/T_2$ と定めて (B.10) に適用すると以下の式を得る。

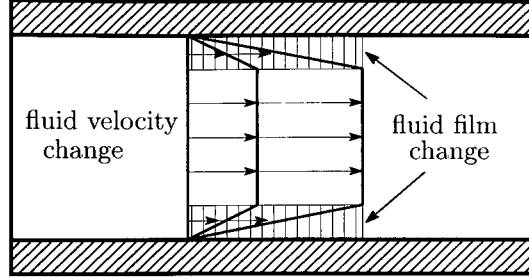
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{T_2} \cdot \frac{\partial \theta_1(t, l)}{\partial t} + \frac{v_1(t)}{L} \cdot \frac{\partial \theta_1(t, l)}{\partial l} = a_1 (\theta_2(t, l) - \theta_1(t, l)), \quad \theta_1(t, 0) = \theta_{1i}(t) \\ \frac{1}{T_2} \cdot \frac{\partial \theta_2(t, l)}{\partial t} + \frac{v_2(t)}{L} \cdot \frac{\partial \theta_2(t, l)}{\partial l} = a_2 (\theta_1(t, l) - \theta_2(t, l)), \quad \theta_2(t, 0) = \theta_{2i}(t) \end{array} \right. \quad (\text{B.11})$$

第一流体において任意の定常流速 v_{1s} を定め、それが熱交換器管を通り抜ける時間を $T_1 = L/v_{1s}$ とする。(B.11) の2式の両辺にそれぞれ、 T_1 と T_2 を掛けると以下の基礎方程式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} r \frac{\partial \theta_1(t, l)}{\partial t} + \frac{v_1(t)}{v_{1s}} \frac{\partial \theta_1(t, l)}{\partial l} = a_1 (\theta_2(t, l) - \theta_1(t, l)), \quad \theta_1(t, 0) = \theta_{1i}(t) \\ \frac{\partial \theta_2(t, l)}{\partial t} + \frac{v_2(t)}{v_{2s}} \frac{\partial \theta_2(t, l)}{\partial l} = a_2 (\theta_1(t, l) - \theta_2(t, l)), \quad \theta_2(t, 0) = \theta_{2i}(t) \\ a_1 = \frac{kAT_1}{C_{f1}\rho_{f1}S_{f1}L}, \quad a_2 = \frac{kAT_2}{C_{f2}\rho_{f2}S_{f2}L} \\ r = \frac{T_1}{T_2} = \frac{v_{2s}}{v_{1s}}, \quad T_1 = \frac{L}{v_{1s}}, \quad T_2 = \frac{L}{v_{2s}} \end{array} \right. \quad (\text{B.12})$$

定常状態周りの方程式

流速 v が変化する場合、熱通過率 k も Fig.B.3 のように変化する。この時の k は、乱流においては流速 v の 0.8 乗に比例する事が知られている。そのため、流速が時間関数 $v(t)$ となる場合、熱通過率も時間関数 $k(t)$ となってしまうため、前節までたてた基礎方程式は内部でパラメタ変動を引き起こす強い非線形状態方程式となってしまう。そこで (B.12) を定常状態を原点とした方程式で立て直

Fig. B.3: Change of overall heat transfer coefficient k

すことを考える。ここで、時間の変数を以下のような定常周りの式で定義し直す。

$$v_1(t) = v_{1s}(1 + \omega(t)), \quad v_2(t) = v_{2s}(1 + u(t)) \quad (\text{B.13})$$

$$k(t) = k_s(1 + m_1\omega(t) + m_2u(t)) \quad (\text{B.14})$$

$$\theta_1(t, l) = \theta_{1s}(l) + \Delta\theta_1(t, l), \quad \theta_2(t, l) = \theta_{2s}(l) + \Delta\theta_2(t, l) \quad (\text{B.15})$$

$$\theta_{1i}(t) = \theta_{1is} + \Delta\theta_{1i}(t), \quad \theta_{2i}(t) = \theta_{2is} + \Delta\theta_{2i}(t) \quad (\text{B.16})$$

ここで、 ω, u は第 1・第 2 流体の定常値からの流速変化率であり、 m は熱通過率 k に対する流量依存率である。これらを (B.12) に代入すると、以下のような定常状態周りの式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} r \frac{\partial \Delta\theta_1(t, l)}{\partial t} + (1 + \omega(t)) \left(\frac{d\theta_{1s}(l)}{dl} + \frac{\partial \Delta\theta_1(t, l)}{\partial l} \right) \\ = a_{1s} (1 + m_2u(t) + m_1\omega(t)) (\Delta\theta_2(t, l) - \Delta\theta_1(t, l) + \theta_{2s}(l) - \theta_{1s}(l)) \\ \Delta\theta_1(t, 0) = \Delta\theta_{1i}(t) \\ \\ \frac{\partial \Delta\theta_2(t, l)}{\partial t} + (1 + u(t)) \left(\frac{d\theta_{2s}(l)}{dl} + \frac{\partial \Delta\theta_2(t, l)}{\partial l} \right) \\ = a_{2s} (1 + m_2u(t) + m_1\omega(t)) (\Delta\theta_1(t, l) - \Delta\theta_2(t, l) + \theta_{1s}(l) - \theta_{2s}(l)) \\ \Delta\theta_2(t, 0) = \Delta\theta_{2i}(t) \\ \\ a_{1s} = \frac{k_s AT_1}{C_{f1} \rho_{f1} S_{f1} L}, \quad a_{2s} = \frac{k_s AT_2}{C_{f2} \rho_{f2} S_{f2} L} \end{array} \right. \quad (\text{B.17})$$

定常状態時において、時間変化は起こらないため、(B.17) は以下の式になる。

$$\begin{cases} \frac{d\theta_{1s}(l)}{dl} = a_{1s}(\theta_{2s}(l) - \theta_{1s}(l)), & \theta_{1s}(0) = \theta_{1is} \\ \frac{d\theta_{2s}(l)}{dl} = a_{2s}(\theta_{1s}(l) - \theta_{2s}(l)), & \theta_{2s}(0) = \theta_{2is} \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

(B.18) は

$$\frac{d}{dl} \begin{bmatrix} \theta_{1s}(l) \\ \theta_{2s}(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{1s} & a_{1s} \\ a_{2s} & -a_{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1s}(l) \\ \theta_{2s}(l) \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

となるため、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{1s} & a_{1s} \\ a_{2s} & -a_{2s} \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

とおくと、行列指数関数 $e^{\mathbf{A}l}$ をもちいて

$$\begin{bmatrix} \theta_{1s}(l) \\ \theta_{2s}(l) \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}l} \begin{bmatrix} \theta_{1s}(0) \\ \theta_{2s}(0) \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

と表せる。(B.19) を $l \rightarrow p$ でラプラス変換した場合、 $e^{\mathbf{A}l}$ は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}l} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} p + a_{1s} & -a_{1s} \\ -a_{2s} & p + a_{2s} \end{pmatrix}^{-1} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p(p + a_{1s} + a_{2s})} \begin{pmatrix} p + a_{2s} & a_{1s} \\ a_{2s} & p + a_{1s} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{a_{1s} + a_{2s}} \begin{bmatrix} a_{2s} + a_{1s}e^{-p_a l} & a_{1s}(1 - e^{-p_a l}) \\ a_{2s}(1 - e^{-p_a l}) & a_{1s} + a_{2s}e^{-p_a l} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

ここで、 $p_a = a_{1s} + a_{2s}$ である。よって (B.21) は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_{1s}(l) \\ \theta_{2s}(l) \end{bmatrix} &= e^{\mathbf{A}l} \begin{bmatrix} \theta_{1is} \\ \theta_{2is} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{1s} + a_{2s}} \begin{bmatrix} (a_{2s} + a_{1s}e^{-p_al})\theta_{1is} + a_{1s}(1 - e^{-p_al})\theta_{2is} \\ a_{2s}(1 - e^{-p_al})\theta_{1is} + (a_{1s} + a_{2s}e^{-p_al})\theta_{2is} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{1s} + a_{2s}} \begin{bmatrix} a_{2s}\theta_{1is} + a_{1s}\theta_{2is} + a_{1s}(\theta_{1is} - \theta_{2is})e^{-p_al} \\ a_{2s}\theta_{1is} + a_{1s}\theta_{2is} + a_{2s}(\theta_{2is} - \theta_{1is})e^{-p_al} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

ここで (B.23) より

$$\begin{cases} \theta_{1s}(l) - \theta_{2s}(l) = (\theta_{1is} - \theta_{2is})e^{-p_al} \\ \theta_{2s}(l) - \theta_{1s}(l) = (\theta_{2is} - \theta_{1is})e^{-p_al} \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

となる。上式より (B.18) は

$$\begin{cases} \frac{d\theta_{1s}(l)}{dl} = a_{1s}(\theta_{2is} - \theta_{1is})e^{-p_al} \\ \frac{d\theta_{2s}(l)}{dl} = a_{2s}(\theta_{1is} - \theta_{2is})e^{-p_al} \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

となる。(B.24)(B.25) を (B.17) に代入すると、以下のような定常周りの基礎方程式を得る。

$$\left\{ \begin{aligned} &r \frac{\partial \Delta\theta_1(t, l)}{\partial t} + (1 + \omega(t)) \frac{\partial \Delta\theta_1(t, l)}{\partial l} \\ &= e^{p_al} (K_{1u}u(t) + K_{1\omega}\omega(t)) + (a_{1s} + L_{1u}u(t) + L_{1\omega}\omega(t)) (\Delta\theta_2(t, l) - \Delta\theta_1(t, l)) \\ &\Delta\theta_1(t, 0) = \Delta\theta_{1i}(t) \\ &\frac{\partial \Delta\theta_2(t, l)}{\partial t} + (1 + u(t)) \frac{\partial \Delta\theta_2(t, l)}{\partial l} \\ &= e^{p_al} (K_{2u}u(t) + K_{2\omega}\omega(t)) + (a_{2s} + L_{2u}u(t) + L_{2\omega}\omega(t)) (\Delta\theta_1(t, l) - \Delta\theta_2(t, l)) \\ &\Delta\theta_2(t, 0) = \Delta\theta_{2i}(t) \\ &K_{1u} = a_{1s}m_2(\theta_{2is} - \theta_{1is}), \quad K_{1\omega} = a_{1s}(m_1 - 1)(\theta_{2is} - \theta_{1is}) \\ &K_{2u} = a_{2s}(m_2 - 1)(\theta_{1is} - \theta_{2is}), \quad K_{2\omega} = a_{2s}m_1(\theta_{1is} - \theta_{2is}) \\ &L_{1u} = a_{1s}m_2, \quad L_{1\omega} = a_{1s}m_1 \\ &L_{2u} = a_{2s}m_2, \quad L_{2\omega} = a_{2s}m_1 \end{aligned} \right. \quad (\text{B.26})$$

B.5 重み付残差法

これまで導出してきた並流型熱交換器の偏微分方程式モデルは、温度状態が時間変数 t だけでなく距離変数 l にも依存した分布定数系となっている。しかし、実際のシステムに対し、分布定数系として制御を行おうとすると、構造的に困難な場合が多い。例えば、熱交換器内部の全温度状態を計測することはできない。そのため、実装の際には分布定数系を集中定数系へと集中化近似を行う必要がある。

そこで、本節では集中化近似の方法として重み付き残差法 (method of weighted residuals: MWR) を用いる。分布温度 $\Delta\theta(t, l)$ は、時間変数 t の関数と距離変数 l の関数とに分解され、それらの積の形で集中化近似される。このとき、試行関数を l^m , ($m = 1, 2, \dots, N$) とすることにより、集中化近似後も試行関数を用いて分布状態を再現できる。重み関数選択法は有限要素法としても知られるガラーキン法とし、このときの重み関数を l^{n-1} , ($n = 1, 2, \dots, N$) とする。

重み付き残差法の適用

(B.26) の分布温度 $\Delta\theta(t, l)$ を、展開係数 $\eta_m(t)$, ($m = 1, 2, \dots, N$) と試行関数 l^m , ($m = 1, 2, \dots, N$) の積の和で近似させると

$$\begin{cases} \Delta\theta_1(t, l) = \sum_{m=1}^N \eta_{1m}(t) l^m \\ \Delta\theta_2(t, l) = \sum_{m=1}^N \eta_{2m}(t) l^m \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

となる。(H.E.N.) に帰着させるため、近似値も (B.26) と同じ記号 $\Delta\theta$ を使う事とする。(B.27) は境界条件

$$\begin{cases} \Delta\theta_1(t, 0) = 0 \\ \Delta\theta_2(t, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

を満たす事に注意する。

ここで、(B.26) に (B.27) を代入したときに生じる誤差 (残差) R を以下のように表す。

$$\begin{cases} R_1 = r \frac{\partial \Delta \theta_1(t, l)}{\partial t} + (1 + \omega(t)) \frac{\partial \Delta \theta_1(t, l)}{\partial l} - e^{p_a l} (K_{1u} u(t) + K_{1\omega} \omega(t)) \\ \quad - (a_{1s} + L_{1u} u(t) + L_{1\omega} \omega(t)) (\Delta \theta_2(t, l) - \Delta \theta_1(t, l)) \\ R_2 = \frac{\partial \Delta \theta_2(t, l)}{\partial t} + (1 + u(t)) \frac{\partial \Delta \theta_2(t, l)}{\partial l} - e^{p_a l} (K_{2u} u(t) + K_{2\omega} \omega(t)) \\ \quad - (a_{2s} + L_{2u} u(t) + L_{2\omega} \omega(t)) (\Delta \theta_1(t, l) - \Delta \theta_2(t, l)) \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

残差 R を出来るだけ小さくする展開係数 $\eta_m(t)$, ($m = 1, 2, \dots, N$) の決定条件を、重み関数を l^{n-1} , ($n = 1, 2, \dots, N$) とした以下の直交条件で定める。

$$\begin{cases} \int_0^1 l^{n-1} R_1 dl = 0 & n = 1, 2, \dots, N \\ \int_0^1 l^{n-1} R_2 dl = 0 & n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

(B.27) の右辺で表した (B.29) を (B.30) に代入すると、次のような式になる。

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 l^{n-1} R_1 dl \\ &= \sum_{m=1}^N \int_0^1 \left(r l^{m+n-1} \dot{\eta}_{1m}(t) + m l^{m+n-2} (1 + \omega(t)) \eta_{1m}(t) \right. \\ &\quad \left. - l^{m+n-1} (a_{1s} + L_{1u} u(t) + L_{1\omega} \omega(t)) (\eta_{2m}(t) - \eta_{1m}(t)) \right) dl \\ &\quad - (K_{1u} u(t) + K_{1\omega} \omega(t)) \int_0^1 l^{n-1} e^{p_a l} dl \\ &= \sum_{m=1}^N \left(\frac{r}{m+n} \eta_{1m}(t) + \left(\frac{m(1+\omega(t))}{m+n-1} + \frac{a_{1s} + L_{1u} u(t) + L_{1\omega} \omega(t)}{m+n} \right) \eta_{1m}(t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_{1s} + L_{1u} u(t) + L_{1\omega} \omega(t)}{m+n} \eta_{2m}(t) \right) \\ &\quad - (K_{1u} u(t) + K_{1\omega} \omega(t)) \int_0^1 l^{n-1} e^{p_a l} dl \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 l^{n-1} R_2 dl \\
&= \sum_{m=1}^N \int_0^1 \left(l^{m+n-1} \dot{\eta}_{2m}(t) + m l^{m+n-2} (1+u(t)) \eta_{2m}(t) \right. \\
&\quad \left. - l^{m+n-1} (a_{2s} + L_{2u} u(t) + L_{2\omega} \omega(t)) (\eta_{1m}(t) - \eta_{2m}(t)) \right) dl \\
&\quad - (K_{2u} u(t) + K_{2\omega} \omega(t)) \int_0^1 l^{n-1} e^{p_a l} dl \\
&= \sum_{m=1}^N \left(\frac{1}{m+n} \eta_{2m}(t) + \left(\frac{m(1+u(t))}{m+n-1} + \frac{a_{2s} + L_{2u} u(t) + L_{2\omega} \omega(t)}{m+n} \right) \eta_{2m}(t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_{2s} + L_{2u} u(t) + L_{2\omega} \omega(t)}{m+n} \eta_{1m}(t) \right) \\
&\quad - (K_{2u} u(t) + K_{2\omega} \omega(t)) \int_0^1 l^{n-1} e^{p_a l} dl \quad n = 1, 2, \dots, N \tag{B.32}
\end{aligned}$$

行列変形

ここで、以下のようなベクトル $\boldsymbol{\eta}_1(t), \boldsymbol{\eta}_2(t), \boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^N$ と行列 $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ を定義する。

$$\boldsymbol{\eta}_1(t) = \begin{bmatrix} \eta_{11}(t) \\ \vdots \\ \eta_{1N}(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2(t) = \begin{bmatrix} \eta_{21}(t) \\ \vdots \\ \eta_{2N}(t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_a} e^{p_a} - \frac{1}{p_a} \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} {}_{n-1}P_{m-1} \frac{1}{p_a^m} e^{p_a} - (-1)^{n-1} {}_{n-1}P_{n-1} \frac{1}{p_a^n} \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^N (-1)^{m-1} {}_{N-1}P_{m-1} \frac{1}{p_a^m} e^{p_a} - (-1)^{N-1} {}_{N-1}P_{N-1} \frac{1}{p_a^N} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+1} & \cdots & \frac{1}{m+1} & \cdots & \frac{1}{N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{1+n} & \cdots & \frac{1}{m+n} & \cdots & \frac{1}{N+n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1+N} & \cdots & \frac{1}{m+N} & \cdots & \frac{1}{N+N} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+1-1} & \cdots & \frac{m}{m+1-1} & \cdots & \frac{N}{N+1-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{1+n-1} & \cdots & \frac{m}{m+n-1} & \cdots & \frac{N}{N+n-1} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1+N-1} & \cdots & \frac{m}{m+N-1} & \cdots & \frac{N}{N+N-1} \end{bmatrix}$$

これらを使い、(B.31) と (B.32) を行列で表すと、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{o} = & \begin{bmatrix} r\boldsymbol{T} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{U} + a_{1s}\boldsymbol{T} & -a_{1s}\boldsymbol{T} \\ -a_{2s}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{U} + a_{2s}\boldsymbol{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1(t) \\ \boldsymbol{\eta}_2(t) \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} K_{1\omega}\boldsymbol{S} \\ K_{2\omega}\boldsymbol{S} \end{bmatrix} \omega(t) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{U} + L_{1\omega}\boldsymbol{T} & -L_{1\omega}\boldsymbol{T} \\ -L_{2\omega}\boldsymbol{T} & L_{2\omega}\boldsymbol{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1(t) \\ \boldsymbol{\eta}_2(t) \end{bmatrix} \omega(t) \\ & - \begin{bmatrix} K_{1u}\boldsymbol{S} \\ K_{2u}\boldsymbol{S} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} L_{1u}\boldsymbol{T} & -L_{1u}\boldsymbol{T} \\ -L_{2u}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{U} + L_{2u}\boldsymbol{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1(t) \\ \boldsymbol{\eta}_2(t) \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

となり、上式は以下のような常微分の状態方程式で表せる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1(t) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2(t) \end{bmatrix} = & - \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{U} + \frac{a_{1s}}{r}\boldsymbol{I} & -\frac{a_{1s}}{r}\boldsymbol{I} \\ -a_{2s}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{U} + a_{2s}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1(t) \\ \boldsymbol{\eta}_2(t) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{K_{1\omega}}{r}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{S} \\ K_{2\omega}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{S} \end{bmatrix} \omega(t) - \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{U} + \frac{L_{1\omega}}{r}\boldsymbol{I} & -\frac{L_{1\omega}}{r}\boldsymbol{I} \\ -L_{2\omega}\boldsymbol{I} & L_{2\omega}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1(t) \\ \boldsymbol{\eta}_2(t) \end{bmatrix} \omega(t) \\ & + \begin{bmatrix} \frac{K_{1u}}{r}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{S} \\ K_{2u}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{S} \end{bmatrix} u(t) - \begin{bmatrix} \frac{L_{1u}}{r}\boldsymbol{I} & -\frac{L_{1u}}{r}\boldsymbol{I} \\ -L_{2u}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{U} + L_{2u}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1(t) \\ \boldsymbol{\eta}_2(t) \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

また、 $\mathbf{E}(l) = [l, l^2, \dots, l^N]$ とすると (B.27) 式は以下のような出力方程式として表せる。

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_1(t, l) \\ \Delta\theta_2(t, l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(l) & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{E}(l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1(t) \\ \boldsymbol{\eta}_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.35})$$

(B.34)(B.35) の各要素を以下の記号で表す。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(t) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1(t) \\ \boldsymbol{\eta}_2(t) \end{bmatrix} & \Delta\boldsymbol{\theta}(t, l) &= \begin{bmatrix} \Delta\theta_1(t, l) \\ \Delta\theta_2(t, l) \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_\eta &= - \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U} + \frac{a_{1s}}{r}\mathbf{I} & -\frac{a_{1s}}{r}\mathbf{I} \\ -a_{2s}\mathbf{I} & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U} + a_{2s}\mathbf{I} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{\eta\omega} &= \begin{bmatrix} \frac{K_{1\omega}}{r}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S} \\ K_{2\omega}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S} \end{bmatrix} & \mathbf{M}_{\eta\omega} &= - \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U} + \frac{L_{1\omega}}{r}\mathbf{I} & -\frac{L_{1\omega}}{r}\mathbf{I} \\ -L_{2\omega}\mathbf{I} & L_{2\omega}\mathbf{I} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{\eta u} &= \begin{bmatrix} \frac{K_{1u}}{r}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S} \\ K_{2u}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S} \end{bmatrix} & \mathbf{M}_{\eta u} &= - \begin{bmatrix} \frac{L_{1u}}{r}\mathbf{I} & -\frac{L_{1u}}{r}\mathbf{I} \\ -L_{2u}\mathbf{I} & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U} + L_{2u}\mathbf{I} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_\theta(l) &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}(l) & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{E}(l) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

このとき、(B.34)(B.35) は、分布定数系を集中定数系として近似した、以下の式 (\mathcal{HEX}) で表すことができる。

$$(\mathcal{HEX}) : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{A}_\eta \boldsymbol{\eta}(t) + \left(\mathbf{B}_{\eta\omega} + \mathbf{M}_{\eta\omega} \boldsymbol{\eta}(t) \right) \omega(t) + \left(\mathbf{B}_{\eta u} + \mathbf{M}_{\eta u} \boldsymbol{\eta}(t) \right) u(t), \\ \Delta\boldsymbol{\theta}(t, l) = \mathbf{C}_\theta(l) \boldsymbol{\eta}(t), \end{cases} \quad (\text{B.36})$$

上式での距離 l は変数として扱っているため、定数 l_1, l_2 のように区別していない事に注意する。ここで、 $\boldsymbol{\eta}(t)$ を状態量、 $\omega(t)$ を外乱、 $u(t)$ を入力と考えると、(B.36) は状態量と入力の積 (双線形入力) だけでなく、状態量と外乱の積 (双線形外乱) を含む双線形システムとなる事が分かる。

参考文献

- [1] R. R. Mohler, “Nonlinear Systems, vol. 2, Application to Bilinear Control”, *Prentice Hall*, 1991.
- [2] G. Zames, “Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-26, No. 2, pp. 301-320, 1981.
- [3] K. Glover and J.C.Doyle, “State-Space Formulae for All Stabilizing Controllers that Satisfy an H_∞ Norm Bound and Relations to Risk Sensitivity”, *Systems and Control Letters*, 11, pp. 167–172, 1988.
- [4] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, “State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 6, pp. 770–784, 1989.
- [5] K. Uchida and M. Fujita, “On the Central Controller: Characterizations via Differential Games and LEQG Control Problems”, *Systems & Control Letters*, Vol. 13, No. 1, pp. 9–13, 1989.
- [6] 児島晃, 藤田政之, 内田健康, 示村 悦二郎, “線形 2 次形式微分ゲームと H_∞ 制御-平方完成を用いた直接的アプローチ”, 計測自動制御学会論文集, Vol. 28, No. 5, pp. 570–577, 1992.
- [7] A. J. van der Schaft, “ L_2 -Gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback H_∞ Control”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 6, pp. 770–784, 1992.

- [8] A. Isidori and A. Astolfi, “Disturbance Attenuation and H_∞ Control via Measurement Feedback in Nonlinear Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, pp. 1283–1293, 1992.
- [9] 井村順一, “非線形 H_∞ 制御-線形系の H_∞ 制御は非線形系にどこまで拡張可能か”, 計測と制御, Vol. 34, No. 3, pp. 188–195, 1995.
- [10] J. Imura and T. Yoshikawa, “Characterization of Some Gain Conditions via Hamilton-Jacobi Inequality”, *Systems & Control Letters*, Vol. 28, No. 5, pp. 263–271, 1996.
- [11] J. Huang and C. F. Liii, “Numerical Approach to Computing Nonlinear H_∞ Control Laws”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No. 5, pp. 989–994, 1995.
- [12] W-M. Lu and J. C. Doyle, “ H_∞ Control of Nonlinear Systems: A Convex Characterization”, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 40, No. 9, pp. 1668–1675, 1995.
- [13] J.R. Cloutier, “State-Dependent Riccati Equation Techniques: An Overview”, *Proceeding of American Control Conference*, pp. 932–936, 1997.
- [14] 三平満司, 久保田健太, “非線形 H_∞ 制御の多自由度構造物の振動制御への応用可能性”, 第 23 回制御理論シンポジウム, pp. 301–306, 1994.
- [15] E. Shimizu, K. Kubota, M. Sampei and M. Koga, “Design of a Nonlinear H-infinity State Feedback Controller for Bilinear Systems with Nonlinear Weights”, *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2323–2324, 1997.
- [16] 清水悦郎, 久保田健太, 三平満司, 古賀雅伸, “双線形システムに対する非線形 H_∞ 状態フィードバック制御則の一設計法”, 計測自動制御学会論文集, Vol. 35, No. 6, pp. 762–771, 1999.
- [17] 三平満司, 大作覚, 上村一整, “非線形 H_∞ 制御理論の限界と可能性-セミアクティブサスペンションへの応用”, システム制御情報, Vol. 43, No. 10, pp. 544–552, 1999.
- [18] 大作覚, 三平満司, 清水悦郎, 富田晃市, “非線形 H_∞ 制御によるセミアクティブサスペンション”, 計測と制御, Vol. 35, No. 2, pp. 126–129, 2000.

- [19] 三平満司, “非線形 H_∞ 制御とその応用”, ふえらむ, Vol. 8, No. 8, pp. 581–585, 2003.
- [20] 梅原隆一, 大槻真嗣, 吉田和夫, “双線形ロバスト制御理論と鉄道車両用セミアクティブサスペンションへの応用”, 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 71, No. 701, pp. 129–136, 2000.
- [21] 伊藤, 阿部, 嘉納, “流量を操作量とする熱交換器の非線形 H_∞ 制御”, 第 17 回 Dynamical System Theory シンポジウム, pp 305–308, 1994.
- [22] H. Kanoh, T. Itoh and N. Abe, “Nonlinear H_∞ Control for Heat Exchangers Controlled by the Manipulation of Flow Rate”, *Proceedings of the 2nd World Congress of Nonlinear Analysts*, Vol. 30, No. 4, pp. 2237–2248, 1997.
- [23] 佐々木清吾, 内田健康, “双線形システムに対する H_∞ 出力フィードバック制御問題の解法”, 計測自動制御学会論文集, Vol. 32, No. 6, pp. 871–879, 1996.
- [24] S. Sasaki and K. Uchida, “Syntheses of H_∞ Output Feedback Control for Bilinear Systems”, *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, pp. 3282–3287, 1996.
- [25] 佐々木清吾, “2 次形式および拡張 2 次形式リアプノフ関数に基づく非線形ロバスト制御系の構成に関する研究”, 早稲田大学博士論文, 1998.
- [26] S. Sasaki and K. Uchida, “ H_∞ Output Feedback Control Problems for Bilinear Systems”, *Advances in Dynamic Games and Applications*, Annals of the International Society of Dynamic Games, vol.5, (Filar, J. A., V. Gaitsgory, and K. Mizukami, Eds.), Birkhauser, Boston, pp. 31–46, 2000.
- [27] 中山信, 嘉納秀明, “流量を操作量とした分布系熱交換器に対する双線形 H_∞ 制御”, 第 50 回自動制御連合講演会, pp. 101–105, 慶應大学, 2007.
- [28] L. Patpong, M. Sampei, M. Koga and E. Shimizu, “A Numerical Computational Approach of Hamilton-Jacobi-Isaacs Equation in Nonlinear H_∞ Control Problems”, In 35th CDC, 1996.

- [29] S. Hara and K. Furuta, “Minimal Order State Observers for Bilinear Systems”, *International Journal of Control*, Vol. 24, No. 5, pp. 705–718, 1976.
- [30] Y. Funahashi, “Stable State Estimator for Bilinear Systems”, *International Journal of Control*, Vol. 29, No. 2, pp. 181–188, 1979.
- [31] 古莊純次, “線形および双線形オブザーバを用いた状態推定によるプロセス自動制御に関する研究”, 大阪大学博士論文, 1976.
- [32] J. Furusho, H. Kanoh and M. Masubuchi, “Observers for Bilinear Distributed Parameter Processes”, *Proceedings of the IFAC 2nd Symposium on Control of Distributed Parameter and Large Scale Systems*, pp. 219–229, 1979.
- [33] H. Yang and M. Saif, “State Observation, Failure Detection and Isolation (FDI) in Bilinear Systems”, *International Journal of Control*, Vol. 67, No. 6, pp. 901–920, 1997.
- [34] M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, C. Mechmeche, and M. Darouach, “On Disturbance Decoupled Observers for a Class of Bilinear Systems”, *International Journal of Control*, Vol. 120, No. 3, pp. 371–377, 1998.
- [35] 鈴木聡 “状態依存型リカッチ制御の理論と実用性”, 計測と制御, Vol. 44, No. 2, pp. 147–152, 2005.
- [36] 岩瀬将美, 渡辺晃規, “状態依存型リカッチ方程式を利用した非線形制御”, シミュレーション, Vol. 27, No. 4, pp. 226–233, 2008.
- [37] Y. Huang and W-M. Lu, “Nonlinear Optimal Control: Alternatives to Hamiltonian-Jacobi Equation”, *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, pp. 3942–3947, 1996.
- [38] Y. Huang and A. Jadbabaie, “Nonlinear H control: An enhanced Quasi-LPV approach”, *Proceedings of the 14th IFAC World Congr*, Beijing, China, pp. 85–90, 1999.

- [39] J. R. Cloutier and P. H. Zipfel, "Hypersonic Guidance via the Statedependent Riccati Equation Control Method", *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, Hawaii, USA, pp. 219–224, 1999.
- [40] J. R. Cloutier and P. H. Zipfel, "Hypersonic Guidance via the Statedependent Riccati Equation Control Method", *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications*, Mexico City, Mexico, pp. 369–374, 2001.
- [41] P.K. Menon and E.J. Ohlmeyer, "Computer-Aided Synthesis of Nonlinear Autopilots for Missiles", *Nonlinear Studies*, Vol. 11, No. 2, pp. 173–198, 2004.
- [42] S. C. Beeler, "State-Dependent Riccati Equation Regulation of Systems with State and Control Nonlinearities", Technical Report NASA/CR-2004-213245, National Institute of Aerospace, Hampton, Virginia, 2004.
- [43] M. Izutsu, Y. Pan and K. Furuta, "Swing-up of Furuta Pendulum by Nonlinear Sliding Mode Control", *SICE Journal of Control, Measurements, and System Integration*, Vol. 1, No. 1, pp. 12–17, 2008.
- [44] H. Beikzadeh and H. D. Taghirad, "Nonlinear sensorless speed control of PM synchronous motor via an SDRE observer-controller combination", *Proceedings of the 4th IEEE conference on Industrial Electronics and Applications*, Xian, China, pp. 3570–3575, 2009.
- [45] E. Erdem and A. Alleyne, "Experimental Real-Time SDRE Control of an Underactuated Robot", *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida USA, December 2001
- [46] A. A. Bogdanov, E. A. Wan, M. Carlsson, R. Kiebertz, G. Harvey, J. Hunt, and R. van der Merwe, "State-Dependent Ricatti Equation Control of a Small Unmanned Helicopter", *Proceedings of the AIAA Guidance Navigation and Control Conference*, AIAA Paper Number: 2003-5672, Austin, TX, August 2003.

- [47] J. Imae, H. Sagami, T. Kobayashi, G. Zhai, “Nonlinear Control Design Method Based on State-Dependent Riccati Equation (SDRE) via Quasi-Newton Method”, *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2740–2741, December 2004.
- [48] 堀恵輔, 川田昌克, “SDRE に基づくアーム型倒立振子のサーボ制御”, 第 49 回自動制御連合講演会, SA9-2-3, 神戸大学, 2006.
- [49] K. Watanabe, M. Iwase, S. Hatakeyama and T. Maruyama, “Control Strategy for a Snake-like Robot based on Constraint Force and Verification by Experiment”, *Proceedings of the 2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1618–1623, 2008.
- [50] J. R. Cloutier, C. N. D ’ Souza and C. P. Mracek, “Nonlinear Regulation and Nonlinear H_∞ Control via the State-Dependent Riccati Equation Technique. Part 1, Theory; Part 2, Examples”, *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*, pp. 117–142, 1996.
- [51] T. Cimen, “State-Dependent Riccati Equation (SDRE) Control: a Survey”, *Proceedings of the 17th World Congress of the International Federation of Automatic Control*, pp. 3761–3775, 2008.
- [52] T. Cimen, “Systematic and Effective Design of Nonlinear Feedback Controllers via the State-Dependent Riccati Equation (SDRE) Method”, *Annual Reviews in Control*, Vol. 34, No. 1, pp. 32–51, 2010.
- [53] X. Zhao and F. Deng, “Solution of the HJI equations for nonlinear H_∞ control design by state-dependent Riccati equations approach”, *Journal of Systems Engineering and Electronics*, Vol. 22, No. 4, pp. 654–660, 2011.
- [54] Y. Sakayanagi, S. Nakaura and M. Sampei, “Design of Free Parameters of State-Dependent Coefficient Form Based on the Relation between State-Dependent Riccati Inequality and Hamilton Jacobi Inequality”, *SICE Journal of Control, Measurements, and System Integration*, Vol. 2, No. 3, pp. 131–138, 2009.

- [55] M. H. Korayem, M. Irani and S. Rafee Nekoo, “Analysis of Manipulators Using SDRE: A Closed Loop Nonlinear Optimal Control Approach”, *Journal of Sciatica Iranica, Transaction B: Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 6, pp. 456–467, 2010.
- [56] 佐々木清吾, 内田健康, “拡張 2 次形式リアプノフ関数による非線形システムの L_2 ゲイン解析～線形行列不等式による凸解析アプローチ～”, 計測自動制御学会論文集, Vol. 33, No. 5, pp. 352–358, 1997.
- [57] 佐々木清吾, 内田健康, “拡張 2 次形式リアプノフ関数による非線形 H_∞ 制御問題へのミニマックスアプローチ”, 計測自動制御学会第 14 回誘導制御シンポジウム予稿集, pp. 115–121, 1997.
- [58] S. Sasaki and K. Uchida, “A Convex Characterization of Analysis and Synthesis for Nonlinear Systems via Extended Quadratic Lyapunov Function”, *Proceedings of the American Control Conference*, Albuquerque, New Mexico, pp. 411–415, 1997.
- [59] 佐々木清吾, 内田健康, “拡張 2 次形式リアプノフ関数による非線形状態フィードバック制御の構成法～線形行列不等式による凸解析アプローチ～”, 計測自動制御学会論文集, Vol. 33, No. 11, pp. 1111–1113, 1997.
- [60] S. Sasaki and K. Uchida, “Nonlinear H_∞ Control System Design via Extended Quadratic Lyapunov Function”, *Proceedings of the 4th IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium*, Enschede The Netherlands, pp. 163–168, 1998.
- [61] 川谷亮治, 藤井隆雄, 木村英紀, “ H_∞ 制御系における外乱推定の役割”, 計測自動制御学会論文集, Vol. 27, No. 9, pp. 990–995, 1991.
- [62] 渡利久規, 山崎敬則, 山川雄司, 黒須 茂, “制御理論講話 (その 10) —ロバスト制御の応用—”, 小山工業高等専門学校研究紀要, 第 39 号, pp. 37–46, 2007.
- [63] 中山信, 小林博明, “双線形外乱流量を含む熱交換器に対する双線形オブザーバを用いた H_∞ 制御器”, 第 52 回自動制御連合講演会, G3-4, 大阪大学, 2009.

- [64] 吉川恒夫, 小林博明, “分散制御系の可観測性—情報交換が存在しない場合—”, 計測自動制御学会論文集, Vol. 11, No. 1, pp. 38–44, 1975.
- [65] T. Yoshikawa and H. Kobayashi, “Observability of Decentralized Discrete-Time Control Systems”, *International Journal of Control*, Vol. 22, No. 1, pp. 83–59, 1975.
- [66] 嘉納秀明, “重み付残差法による分布系熱交換器の近似”, 計測自動制御学会論文集, Vol. 12, No. 6, pp. 632–636, 1976.
- [67] H. Terasaka, H. Kanoh and M. Masubuchi, “Approximate Dynamic Analysis of Crossflow Heat Exchanger by the Method of Weighted Residuals”, *Bulletin of JSME*, Vol. 23 No. 177, pp. 432–438, 1980.
- [68] 熊澤典良, 石塚晃一, 阿部直人, 嘉納秀明, “折り返し法による分布系熱交換器の温度制御”, システム制御情報学会論文集, Vol. 9, No. 6, pp. 287–289, 1996.
- [69] 熊澤典良, “分布および混合定数系に対する最適レギュレータの構成法に関する研究”, 明治大学博士論文, 1996.
- [70] W. Hahn, *Stability of Motion*, Springer, Berlin Heidelberg, 1967.

謝辞

博士後期課程にて本研究を行うに当たり、終始温かく・的確で・親身なご指導を下された明治大学理工学部小林博明教授に多大な感謝の意を表します。私の人生において、もう一人の父であったと考えております。また、私をこの道に導いて下さり、全ての基礎ときっかけを与えて下さった明治大学理工学部嘉納秀明名誉教授に深く感謝いたします。そして、本論文執筆に際し多大なご指導と御助言を賜りました明治大学理工学部小山紀教授、特に明治大学理工学部阿部直人教授の厳しい御指摘が無ければ本研究は完成を見なかったと思っております。お二人に大きな感謝の意を表します。

旧・制御工学研究室の先輩博士に当たる、鹿児島大学工学部熊澤典良准教授と明治大学理工学部市原裕之専任講師には在学中に色々と気を掛けて頂いたうえ、研究においても重要な御指摘を頂き、大変感謝しております。また、数年間眠っていた古い実験熱交換器を、2000年～2002年にかけて新しい計装機器の数々で完全復活させ、現在の制御実験の基礎を構築して下さい、塩澤健先輩に深く感謝いたします。先輩が思い半ばで成し得なかった現代制御の実装、特に H_∞ 制御の実装を、不出来な後輩であった私が達成させたことで、この実験装置も本懐を遂げたのではないのでしょうか。後輩の卒業生におきましては、共に学部の主席であり明治大学付属高校の先輩後輩関係にある、梅津貴志君と、知能機械研究室の狩野累君には、本研究の下支えとなる助力をいただきました。二人に深くお礼を申し上げます。

学生生活を送る上で、大変お世話になった明治大学理工学部清水茂夫教授、特に明治大学理工学部圓谷和雄教授には生活指導や様々なアドバイスを頂きました。本当に感謝しております。また、長くお世話になった明治大学に、深くお礼を申し上げます。御恩返しが出来よう、今後も日々精進していきたいと考えております。

最後に、陰ながら応援してくれた、母 中山美智子、兄 中山太一、義姉 中山智子、に感謝を述べるとともに、在学中に亡くなった父 中山康にこの論文を捧げます。